Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 1. Motivación y Fundamentos

Versión 2.1

Índice general

1. Motivación y Fundamentos 4
   1.2. Producto escalar, vectorial, producto mixto. Orientación de una base 4
   1.3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ 14
   1.4. Combinaciones baricéntricas 34
   1.5. Transformaciones afines 39
   1.6. Ejercicios 44

1. Motivación y Fundamentos

1.2. Producto escalar, vectorial, producto mixto. Orientación de una base

Producto escalar

Partimos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que llamamos V. Puede tener dimensión finita o ser de dimensión infinita. Sus elementos en general los vamos a designar como $\mathbf{v}$ o como $\bar{v}$.

Definición 1. *Un* ***producto escalar*** *definido sobre un espacio vectorial* V *es una aplicación* $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle > 0$ *si* $\mathbf{v} \neq 0$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle = \mathbf{0}$.

2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ *para todo* $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.

3. $\langle \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$ *para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

Aplicando lo que conocemos de las formas, podemos decir que un producto escalar es una forma bilineal no degenerada (definida positiva). El producto escalar también se puede llamar producto interior. En $\mathbb{R}^n$ es habitual denotar el producto escalar de dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Obsérvese que la definición anterior es válida para espacios tanto de dimensión finita como infinita (en general, espacios de funciones).

Vamos a especificar una notación que utilicemos a lo largo del texto. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la formada por los vectores $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, donde cada $\mathbf{e}_i$ es el vector cuyas coordenadas son 0 excepto la que está en el lugar $i-$ésimo. En $\mathbb{R}^3$ la base canónica se suele denotar también como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Vamos a usar ambas notaciones.

Ejemplo 1. Consideramos el espacio $\mathbb{R}^n$ y la base canónica del mismo, es decir, la formada por los vectores$\{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$. Entonces la aplicación

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum^{n} x_iy_i$$

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ si $\mathbf{v} \neq (0, \ldots, 0)$ y $\langle (0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0) \rangle = 0$:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0 \text{ si } x \neq (0, \ldots, 0),$$
$$\langle (0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0) \rangle = 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0 = 0.$$

2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para cualquier $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

3. $\langle \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, denotando $\mathbf{w} = (z_1, \ldots, z_n)$,:

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i z_i + \mu y_i z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} \mu y_i z_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2. Consideramos el espacio $C[0,1]$ de las funciones de variable real con valores en $\mathbb{R}$ continuas en el intervalo $[0,1]$. Vamos a comprobar que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,$$

donde f y g son funciones reales continuas en $[0,1]$, es un producto escalar.

Hay que comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\langle f, f \rangle > 0$ si $f \neq 0$, $\langle 0, 0 \rangle = 0$, para cualquier $f \in C[0,1]$.
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, para cualquier $f, g \in C[0,1]$.
3. $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$ para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y cualquier

1. Sea $f \neq 0$. Se tiene:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x) f(x)\, dx = \int_0^1 f^2(x)\, dx > 0$$

ya que la función $F(x) = f^2(x)$ verifica que $F \neq 0$, $F(x) \geq 0$ para $x \in [0,1]$ y $F \in C[0,1]$, por lo que la integral definida en $[0,1]$ de F representa entonces el área limitada por la gráfica de F y el eje x en el intervalo $[0,1]$.

Obsérvese que, en particular

$$\int_0^1 f(x) f(x)\, dx = 0$$

si y sólo si $f^2(x)$ es idénticamente nula y, por tanto, si y sólo si f es la función nula en $[0,1]$.

Además,

$$\langle 0, 0 \rangle = \int_0^1 0 \cdot 0 dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

2. Comprobamos la segunda propiedad:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx = \int_0^1 g(x) f(x)\, dx = \langle g, f \rangle.$$

3. Nos queda la última propiedad:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + \mu g, h \rangle &= \int_0^1 (\lambda f + \mu g)(x) h(x) dx \\
&= \int_0^1 (\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x))\, dx \\
&= \int_0^1 \lambda f(x)h(x)dx + \int_0^1 \mu g(x)h(x)dx \\
&= \lambda \int_0^1 f(x)h(x)dx + \mu \int_0^1 g(x)h(x)dx
\end{aligned}$$

Observación 2. *Cualquier espacio vectorial normado V sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por tanto, el estudio de cualquier espacio normado de dimensión n se reduce al estudio de $\mathbb{R}^n$.*

Vamos a demostrarlo, pero en una primera lectura puede obviar esta demostración. Partimos de V, un espacio vectorial de dimensión n y de un base suya de vectores unitarios $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ con la norma $\|\cdot\|^*$. Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Entonces podemos establecer un isomorfismo algebraico[1] *entre $\mathbb{R}^n$ y V:*

$$f\left(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right) = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Puesto que el espacio V es de dimensión finita, se cumple además que F es un isomorfismo topológico u homeomorfismo (biyectiva, continua y con inversa continua) entre $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{V}, \|\cdot\|^*)$, en donde $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera[2] *de $\mathbb{R}^n$. Además, cualquier propiedad que posea un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ la tiene también $f(M)$ y cualquier propiedad que tenga un subconjunto $F \subset V$ la tiene también $f^{-1}(F)$.*

No todos los espacios vectoriales con producto escalar tienen dimensión finita. Un ejemplo lo tenemos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$.

Llamamos **espacio euclídeo** a un espacio vectorial con producto escalar.

Proposición 3. *En un espacio vectorial euclídeo V se cumple, para $u, v \in V$, la* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz****:*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle .$$

Proposición 4. *A partir del producto escalar se puede definir una norma:*

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2} .$$

La norma procedente de un producto escalar se llama ***norma euclídea****.*

Ejemplo 3. La distancia entre dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es la norma euclídea del vector PQ que une ambos puntos.

La norma asociada a un producto escalar cumple la **identidad del pa-**

Hemos repasado el producto escalar porque nos permite definir ángulo y ortogonalidad entre elementos de un espacio vectorial. En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ estos conceptos coinciden con la idea intuitiva que tenemos de los mismos. Pero no es tan sencillo en espacios como $C[0,1]$. El **ángulo** que forman dos vectores no nulos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ es el número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Ya conocemos cuándo dos vectores son perpendiculares u ortogonales en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Esta definición se extiende a cualquier espacio euclídeo. Se dice que dos vectores no nulos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ de un espacio euclídeo son **vectores ortogonales** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Ejemplo 4. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$, el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

Vamos a estudiar si las funciones $f(x) = \cos(\pi x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ son ortogonales.

El producto escalar de $f(x) = \cos(\pi x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ es

$$\begin{aligned} < f, g > &= \int_0^1 \cos(\pi x) \operatorname{sen}(\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi}(-\cos 2\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{4\pi}(-\cos 2\pi + \cos 0) = 0. \end{aligned}$$

Luego sí son ortogonales.

Proposición 5. *Dada una familia* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *de vectores ortogonales dos a dos se cumple el* ***Teorema de Pitágonas***

$$\|\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|^2.$$

Y también se extiende a conjuntos de forma natural. Dos subconjuntos A, B de un espacio euclídeo son **subespacios ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in A, y \in B$.

Ejemplo 5. Consideramos el espacio $\mathbb{R}^4$. Sean $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = 0\}$ y N la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(2, -1, 1, 0)$. Vamos a estudiar si estos espacios son ortogonales.

Tenemos que comprobar que el producto escalar de cualquier elemento de M con cualquier elemento de N es 0. Para ello, determinamos la expresión de cualquier elemento de M y N. Si $(x, y, z, t) \in M$, entonces como $y = 2x + z$ para los puntos de M, podemos escribirlo como

$$(\lambda, 2\lambda + \mu, \mu, \gamma)\,, \quad \text{para } \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Este espacio representa un hiperplano de $\mathbb{R}^4$. Por otro lado, si $(x, y, z, t) \in N$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(x, y, z, t) = (2\alpha, -\alpha, \alpha, 0),$$

que es la ecuación de una recta. Calculamos el producto escalar de un elemento de cada espacio:

$$\begin{aligned}(2\alpha, -\alpha, \alpha, 0) \cdot (\lambda, 2\lambda + \mu, \mu, \gamma) &= 2\alpha\lambda - \alpha\,(2\lambda + \mu) + \alpha\mu + 0 \cdot \gamma \\ &= 2\alpha\lambda - 2\alpha\lambda - \alpha\mu + \alpha\mu = 0.\end{aligned}$$

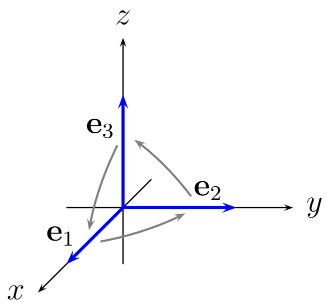
Por eso, sí podemos concluir que son espacios ortogonales. ∎

Orientación, producto vectorial y producto mixto

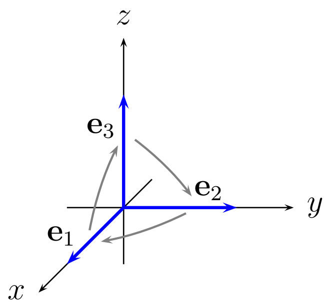
Como sabemos, para obtener las coordenadas de un vector de un espacio vectorial de dimensión finita respecto a una base distinta a la que está expresado, se multiplica el vector de sus coordenadas respecto a la base primera por una matriz, que es la matriz de cambio de base. Esta matriz nos permite clasificar de alguna forma, las bases de espacios vectoriales de dimensión finita que son, como sabemos, isomorfos a $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se dice que **dos bases tienen la misma orientación** si el determinante de la matriz de cambio de base es positivo. Así, se pueden clasificar las bases en $\mathbb{R}^n$ según su orientación con respecto a una base fijada. Como el determinante de la matriz de cambio de base puede ser positivo o negativo, se obtienen dos clases de bases según el valor del determinante: la clase de

Según esto, la base $B' = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}\} = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ tiene orientación negativa. Y $B'' = \{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}\} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ tiene orientación positiva.



Orientación positiva



Orientación negativa

La orientación de una base es un tema importante y que vamos a utilizar al trabajar con curvas y superficies. Allí hablaremos de orientación positiva o negativa y entre otras cosas, en nuestra vida cotidiana es la formulación matemática de izquierda y derecha y da significado matemático a la expresión recorrer una curva en un sentido".

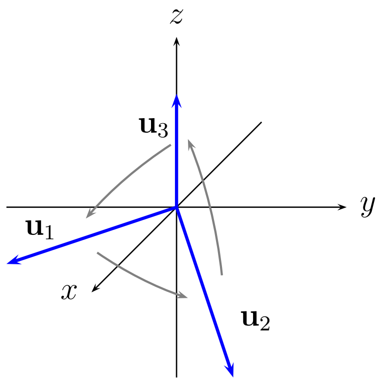
Ahora trabajamos en $\mathbb{R}^3$. Una terna de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ se dice que es derecha o dextrógira si tiene el mismo tipo de orientación que los dedos pulgar, índice y corazón de la mano derecha, o si al ir de $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ el vector $\mathbf{v}_3$ tiene el sentido de avance de un tornillo. En otro caso, se dice que la terna es levógira o izquierda.

Ejemplo 7. La base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ es dextrógira.

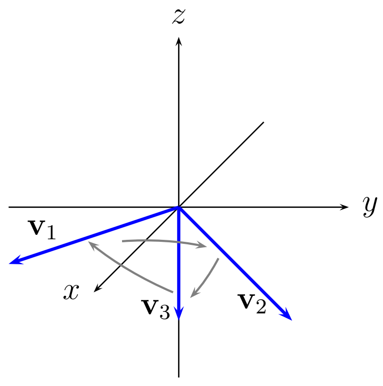
El conjunto de vectores linealmente independientes B formado por los vectores $\{(1,-1,0),(1,1,-1),(0,0,1)\}$ es dextrógiro (los vectores están dados respecto a la base canónica) y el conjunto $\{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,-1)\} = B'$ es levógiro.

En efecto, la matriz de que expresa B respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Elementos de B



Elementos de B'

■

Definición 6. *Si* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *son dos vectores de* $\mathbb{R}^3$, *el* ***producto vectorial*** *de* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$, *denotado por* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ *o* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *es el único vector de* $\mathbb{R}^3$ *que cumple*

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

El producto vectorial también se llama producto exterior.

Determinar qué vector es el producto vectorial de dos vectores puede parecer complicado, pero no lo es tanto. Baste observar que si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces se cumple:

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar de un vector por $\mathbf{e}_1$ es la primera coordenada del vector, entonces la primera coordenada de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ es el determinate anterior. De forma similar, se obtienen las coordenadas segunda y tercera de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Y así, se cumple donde tenemos que calcular un determinante cuya primera fila no son números, sino son los vectores de la base canónica.

Ejemplo 8. Vamos a determinar el producto vectorial de los vectores $(0, -1, 3)$ y $(2, -1, 1)$.

Hacemos

$$(0, -1, 3) \wedge (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3.$$

Luego $(0, -1, 3) \wedge (2, -1, 1) = (2, 6, 2)$ en la base canónica.

Proposición 7. *Propiedades del producto vectorial.*

1. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$, *no conmutativo.*
2. $(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{w}) \wedge \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})$, *linealidad.*
3. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son linealmente dependientes o cero.*
4. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$, *no asociativo.*
5. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A partir de estar propiedades, obtenemos mucha información interesante. Primero observamos que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ es un vector perpendicular al plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (es decir, al subespacio generado por estos vectores). Se demuestra teniendo en cuenta la última propiedad y la linealidad del producto vectorial.

Por otro lado, como

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = |(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})|^2 > 0,$$

entonces la base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ tiene orientación positiva.

Además, el módulo del producto vectorial $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ es el área del paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y viene dado por:

Definición 8. *El **producto mixto** de tres vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *es* $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$*.*

A partir del cálculo del producto vectorial con determinantes, es fácil ver que si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Como interpretación del producto mixto, diremos que el valor absoluto de $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

Ejemplo 9. Determine el volumen del tetraedro de vértices

$$A = (0, 0, 0)\,, \quad B = (1, 1, 1)\,, \quad C = (2, 0, -1)\,, \quad D = (-1, 0, 1)\,.$$

Si consideramos los vectores

$$\mathbf{u} = AB = (1, 1, 1)\,, \quad \mathbf{v} = AC = (2, 0, -1)\,, \quad \mathbf{w} = AD = (-1, 0, 1)\,,$$

entonces el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ es $|(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$. En efecto, observamos que:

$$|(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Si en este paralelepípedo la base está formada por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ es el área de su base y $|\mathbf{w}| \cos\theta$ es su altura. Por eso, $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta$ es el volumen de este paralelepípedo. Y el volumen del tetraedro es la sexta parte del área de este paralelepípedo:

$$V = \frac{1}{6}\,|(AB \wedge AC) \cdot AD| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}.$$

Terminamos adelantando una última propiedad. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones de

1.3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Partimos de funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Son las aplicaciones que a cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ le asignan un elemento

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

donde cada una de las funciones $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de varias variables, que se llama **componente** de f. En esta definición hemos indicado las posibles notaciones que nos vamos a encontrar para hablar de funciones de varias variables definidas sobre un espacio de varias variables (considerando siempre dimensiones finitas).

Son conocidas las propiedades de las componentes, al ser cada componente una función de varias variables que toma valores en $\mathbb{R}$. También se ha trabajado con derivadas direccionales, derivadas parciales y diferencial de estas funciones.

Vamos a distinguir algunos casos particulares de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 10. Si $n = m = 1$, tenemos las funciones $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de variable real sobre $\mathbb{R}$. La función $f : [0, 60] \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $t \in [0, 60]$ le asigna los kilómetros recorridos por un coche Fórmula 1 durante los primeros t minutos de una carrera es un ejemplo de estas funciones.

$\blacksquare$

Ejemplo 11. Si $n > 1, m = 1$, tenemos las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de varias variables con las que hemos trabajado frecuentemente. Un ejemplo es la función $T : [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada punto de coordenadas (x, y) de una placa cuadrada de lado 1, la temperatura $T(x, y)$ en ese punto.

$\blacksquare$

Ejemplo 12. Si $n = 1, m > 1$, la función se suele llamar función vectorial. Casos particulares son:

- Curva plana, considerando el movimiento de una partícula que depende sólo del instante (tiene un grado de libertad $n = 1, m = 2$). La función

$\blacksquare$

Ejemplo 13. Si $n > 1, m > 1$, las funciones se suelen llamar campo vectorial. Citaremos varios ejemplos de estas funciones:

- Simetría en un espacio de dimensión $n > 1$ respecto al origen, que es la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$.
- Superficie, con $n = 2, m = 3$, donde la posición de una partícula en el espacio está determinada a partir de su movimiento con dos grados de libertad.
- Cambio de coordenadas polares a cartesianas y viceversa, en el plano, con $n = 2, m = 2$.
- Cambio de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa, para $n = 3, m = 3$, en el espacio.
- En el espacio, cambio de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa, con $n = 3, m = 3$.

$\blacksquare$

Ejemplo 14. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene todas las derivadas parciales en todos los puntos de A, entonces el gradiente de f es la aplicación que a cada $\mathbf{x} \in A$ le asigna

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), \ldots, D_i f(\mathbf{x}), \ldots, D_n f(\mathbf{x})),$$

y donde $\nabla f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Las definiciones, resultados y procedimientos relativos a funciones de varias variables estudiados anteriormente se pueden extrapolar fácilmente a las funciones objeto de nuestro estudio, teniendo en cuenta que cada una de las componentes es una función de varias variables que toma valores en $\mathbb{R}$.

De esta forma, para funciones $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se pueden definir su función suma y función resta, es decir, considerando estas operaciones

Entonces

$$(f+g)(x,y,z) = f(x,y,z) + g(x,y,z) = \left(xe^y + \frac{x-z}{x^2+1}, z^2+1+z \right),$$
$$(f-g)(x,y,z) = f(x,y,z) - g(x,y,z) = \left(xe^y - \frac{x-z}{x^2+1}, z^2+1-z \right),$$

La composición de funciones de varias variables con valores en espacios multidimensionales se hace considerando las dimensiones de los espacios imagen de la primera función y dominio de la segunda. Consideramos $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ y $C \subset \mathbb{R}^l$, con $f(A) \subset B$ y $g(B) \subset C$. Si para $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ se cumple que para todo $\mathbf{x} \in A$, $f(\mathbf{x}) \in B$, entonces la función $h = g \circ f$ está definida como

$$h(\mathbf{x}) = g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})).$$

Ejemplo 16. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$f(x,y) = \left(y^3, x\right), \quad g(x,y) = \left(\cos(x-y), x^2+y-1, x\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g\left(y^3, x\right) \\ &= \left(\cos\left(y^3 - x\right), \left(y^3\right)^2 + x - 1, y^3\right) = \left(\cos\left(y^3-x\right), y^6+x-1, y^3\right). \end{aligned}$$

Continuidad

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en un punto $\mathbf{a} \in A$ si existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ y además $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Esto es equivalente a decir que cada una de las componentes f_i de f es continua en el punto $\mathbf{a}$. Además, sabemos cómo estudiar la continuidad de cada f_i, al ser funciones de varias variables con valores en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 17. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x,y) = (x^2, y-x+1, \operatorname{sen} \pi y)$ es continua en $(0,0,0)$, porque

$$f(0,0) = \left(0^2, 0-0+1, \operatorname{sen} \pi \cdot 0\right) = (0,1,0),$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2, y-x+1, \operatorname{sen} \pi y\right)$$

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en el conjunto A si es continua en todos los puntos $\mathbf{a} \in A$. Esto es equivalente a decir que cada una de las componentes f_i de f es continua en el conjunto A.

Si $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones continuas en A, entonces también lo son su suma, resta.

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ son funciones continuas en A y B respectivamente, entonces la función $h = g \circ f$ definida como

$$h(\mathbf{x}) = g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$$

también es continua en cualquier $\mathbf{x} \in A$.

Diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $f = (f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m)$, donde cada $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces se puede extender el concepto de derivada según un vector $\mathbf{v}$ a esta función mediante:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \left(D_{\mathbf{v}} f_1(\mathbf{a}), \ldots, D_{\mathbf{v}} f_i(\mathbf{a}), \ldots, D_{\mathbf{v}} f_m(\mathbf{a})\right).$$

Obsérvese que la notación que utilizamos es la habitual para indicar derivada según un vector.

Como $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos utilizar las definiciones y resultados ya conocidos para las funciones de varias variables sobre $\mathbb{R}$. En concreto, podemos considerar sus derivadas parciales según $\mathbf{e}_j$, denotadas como $D_j f_i$ o $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. A partir de ellas, podemos definir un equivalente a la aplicación gradiente, para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Es la apliación dada por la siguiente matriz de orden $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

vamos a determinar su matriz jacobiana. Hacemos

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & D_3 f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & D_3 f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2xyz \operatorname{sen}(x^2yz) & -x^2 z \operatorname{sen}(x^2yz) & -x^2 y \operatorname{sen}(x^2yz) \\ e^z & e^z & e^z(1+x+y+z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos formalmente la diferencial de una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Definición 9. *Una función* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es diferenciable en un punto* $\mathbf{a} \in A$ *si existe una aplicación lineal* $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(\mathbf{a} + \mathbf{h}t) - f(a) - \lambda(\mathbf{h}) \|}{\|h\|} = 0.$$

La función λ *se denomina* ***diferencial*** *de* f *en* $\mathbf{a}$. *Si* f *es diferenciable en todos los puntos de* A *se dice que es diferenciable en* A.

La diferencial tiene las siguientes propiedades:

1. Si existe, la diferencial de f en $\mathbf{a}$ es única. Se denota $Df(\mathbf{a})$, es decir $\lambda(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ y se tiene que la matriz asociada a la aplicación lineal $Df(\mathbf{a})$ es la matriz jacobiana $f'(\mathbf{a})$.

2. Condición necesaria de diferenciabilidad: Si la función f diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces f es continua en $\mathbf{a}$.

Además, al igual que pasaba con la derivada y con las derivadas parciales, hay varias reglas de cálculo que nos permiten determinar la diferencial de una función. Algunas son conocidas del estudio de las funciones de varias variables que toman valores en $\mathbb{R}$.

Proposición 10. *Propiedades de funciones diferenciables.*

1. *Toda función constante en* A *es diferenciable en* A *y su diferencial en cualquier punto* $\mathbf{a}$ *de* A *es la aplicación lineal nula.*

3. *Si* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *son dos funciones diferenciables en* $\mathbf{a} \in A$ *sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *son dos números reales, entonces las funciones* $\alpha f + \beta g$ *y* $f \cdot g$ *son diferenciables en* $\mathbf{a}$ *y:*

$$\begin{aligned} D(\alpha f + \beta g)(\mathbf{a}) &= \alpha Df(\mathbf{a}) + \beta Dg(\mathbf{a}), \\ D(f \cdot g)(\mathbf{a}) &= f(a)\, Dg(\mathbf{a}) + g(a)\, Df(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

4. *Si* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *son dos funciones diferenciables en* $\mathbf{a} \in A$ *sobre* $\mathbb{R}$ *y* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$*, entonces la función cociente es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y se cumple:*

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})\, Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})\, Dg(\mathbf{a})}{(g(\mathbf{a}))^2}.$$

5. ***Regla de la cadena.*** *Sean* A *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* B *un abierto de* $\mathbb{R}^m$*,* f *una función de* A *en* B *y* g *una función de* B*, en* $\mathbb{R}^p$*. Si* f *es diferenciable en* $\mathbf{a} \in A$ *y* g *es diferenciable en* $f(\mathbf{a}) \in B$*, entonces la aplicación compuesta* $h = g \circ f$ *es diferenciable en* a *y:*

$$Dh(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a}).$$

Ejemplo 19. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x, y) = \left(x^2y^4, \cos xy^3\right), \quad g(x, y) = ye^x.$$

Vamos a estudiar si $g \circ f$ es diferenciable y en caso de que lo sea, vamos a determinar su diferencial, tanto para un punto genérico (x, y) como en el punto $(0, 1)$.

En efecto, es diferenciable, por ser composición de funciones diferenciables. Además:

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{pmatrix} D_1f_1(x, y) & D_2f_1(x, y) \\ D_1f_2(x, y) & D_2f(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ -y^3 \operatorname{sen} xy^3 & -3xy^2 \operatorname{sen} xy^3 \end{pmatrix}, \\ Dg(x, y) &= \begin{pmatrix} D_1g(x, y) & D_2g(x, y) \end{pmatrix} = (ye^x, e^x), \end{aligned}$$

$$Dg(f(x, y)) = Dg\left(\left(x^2y^4, \cos xy^3\right)\right) = \left(e^{x^2y^4} \cos xy^3, e^{x^2y^4}\right),$$

Para determinar la diferencial en $(0,1)$ hacemos:

$$\begin{aligned} D\left(g\circ f\right)(0,1) &= (2\cdot 0\cdot 1^4 e^{0^2 1^4}\cos(0\cdot 1^3) - 1^3 e^{0^2 1^4}\operatorname{sen}(0\cdot 1^3), \\ &\quad 4\cdot 0^2 1^3 e^{0^2 1^4}\cos(0\cdot 1^3) - 3\cdot 0\cdot 1^2 e^{0^2 1^4}\operatorname{sen})(0\cdot 1^3)) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Si lo hubiéramos hecho directamente, habríamos hecho:

$$g\left(f\left(x,y\right)\right) = g\left(x^2y^4, \cos xy^3\right) = \left(\cos xy^3\right)e^{x^2y^4}.$$

Y asó podemos obtener las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} D_1 g\left(f\left(x,y\right)\right) &= 2\left(\cos xy^3\right)xy^4 e^{x^2y^4} - y^3 e^{x^2y^4}\operatorname{sen} xy^3, \\ D_2 g\left(f\left(x,y\right)\right) &= 4x^2y^3 e^{x^2y^4}\cos xy^3 - 3xy^2 e^{x^2y^4}\operatorname{sen} xy^3. \end{aligned}$$

■

Finalmente, el siguiente teorema nos dice cuál es la diferencial de una función.

Teorema 11. *Una aplicación $f : A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1,\ldots,f_i,\ldots,f_m)$ es diferenciable en $\mathbf{a}\in A$ si y sólo si cada f_i es diferenciable en $\mathbf{a}$. Además, la diferencial de f en $\mathbf{a}$ es la aplicación lineal $Df\left(\mathbf{a}\right)$ cuyas componentes son las diferenciales $Df_i\left(\mathbf{a}\right)$ de las componentes de f, es decir:*

$$Df\left(\mathbf{a}\right) = \left(Df_1\left(\mathbf{a}\right),\ldots,Df_i\left(\mathbf{a}\right),\ldots,Df_m\left(\mathbf{a}\right)\right).$$

Este resultado indica que la diferencial está dada por la matriz jacobiana.

Ejemplo 20. Según vimos en un ejemplo anterior, la matriz jacobiana de $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, con

$$f(\mathbf{x}) = f\left(x,y,z\right) = \left(x+\cos\left(x^2yz\right), \left(x+y+z\right)e^z\right)$$

es

$$\begin{aligned} f'\left(\mathbf{x}\right) &= \begin{pmatrix} D_1f_1\left(\mathbf{x}\right) & D_2f_1\left(\mathbf{x}\right) & D_3f_1\left(\mathbf{x}\right) \\ D_1f_2\left(\mathbf{x}\right) & D_2f_2\left(\mathbf{x}\right) & D_3f_2\left(\mathbf{x}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2xyz\operatorname{sen}\left(x^2yz\right) & -x^2z\operatorname{sen}\left(x^2yz\right) & -x^2y\operatorname{sen}\left(x^2yz\right) \\ e^z & e^z & e^z\left(1+x+y+z\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la diferencial de la función f en el punto $(0,0,0)$ es la aplicación lineal $Df\left(\mathbf{0}\right):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por

Función implícita. Derivación implícita

Consideramos una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que la ecuación $f(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno $U \subset A$ si existe un entorno $V \subset \mathbb{R}$ y una aplicación $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que los puntos $(x,y) \in U$ con $x \in V, y = g(x)$ satisfacen $f(x,y) = f(x,g(x)) = 0$. Expresado matemáticamente:

$$\{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\} \supset \{(x,y) \in U : x \in V, y = g(y)\}.$$

Esto es lo mismo que decir si podemos escribir y en función de x (para $x \in V$), o si podemos "despejar" y (es decir, cuando $y = g(x)$ o, abusando de la notación $y = y(x)$), entonces en estos puntos se cumple la ecuación $f(x,y) = 0$, para $(x,y) \in U$.

Obsérvese que esta definición se puede reescribir para "despejar" x.

Ejemplo 21. Se tiene la función $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Entonces si consideramos la ecuación

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0,$$

vemos que la variable x se puede expresar en función de la variable y como

$$x = \sqrt{5 - y^2},$$

en el conjunto $[0,\sqrt{5}] \times [0,\sqrt{5}]$. Esto significa que la función f define a la variable x como función implícita de y mediante $x = g(y) = \sqrt{5-y^2}$ y que

$$f\left(\sqrt{5-y^2}, y\right) = 0.$$

Es decir, hemos despejado una de las variables en función de la otra.

Podíamos, de la misma forma, haber expresado y en función de x.

∎

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces el sistema

$$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,$$
$$\cdots$$

Ejemplo 22. Se tiene la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}, t) = f(x, y, t) = e^x - 3y + t^3$. De forma evidente, a partir de la ecuación

$$f(\mathbf{x}, t) = f(x, y, t) = e^x - 3y + t^3 = 0$$

podemos despejar la variable t a partir de (x, y):

$$t = \sqrt[3]{3y - e^x}.$$

Por eso, se dice que f define a la variable t como función implícita de (x, y) mediante $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sqrt[3]{3y - e^x}$ y que

$$f\left(x, y, \sqrt[3]{3y - e^x}\right) = 0.$$

En este ejemplo, hemos despejado una de las variables en función de las otras dos.

La definición anterior nos dice que cuando tenemos un sistema de ecuaciones, podemos despejar unas de las incógnitas en función de las otras. Lo difícil es saber cuándo podemos hacerlo (cuándo existe la función g) y aún en el caso de poder hacerlo, no siempre es fácil encontrar la expresión de g.

Si la función f es lineal, encontrar una función implícita se reduce a estudiar si un sistema tiene solución única.

Teorema 12. ***Teorema de la función implícita.*** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un abierto, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ un punto de A y $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase q en A (es decir, tiene derivadas parciales hasta orden q y son continuas en A). Si se cumple:*

1. $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$,
2. $\det(D_{n+i} f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \neq 0$, *para* $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

Entonces existe un subconjunto abierto $U \subset A$ que contiene a $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{a}$ y una única función $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase q en V tales que:

- *Este teorema nos da condiciones suficientes que nos permiten asegurar que podemos despejar unas de las incógnitas en función de las otras (existe la función g), pero no nos dice cómo calcular g.*
- *Escribiéndolo así, podemos escribir las últimas m incógnitas en función de las n primeras, pero valdría en cualquier orden. En el caso descrito en el teorema, podemos despejar las variables $y_1, \ldots, y_m$ en función de $x_1, \ldots, x_n$.*
- *Si no se cumple la segunda condición, puede haber una, varias o ninguna función implícita, no lo sabemos (las condiciones no son necesarias).*
- *El teorema tiene carácter local, no nos asegura que se pueda hacer globalmente con expresiones únicas.*
- *Como veremos a continuación, el teorema de la función implícita nos permite determinar las derivadas parciales (de cualquier orden) de g.*

A partir del teorema de la función implícita, podemos determinar las derivadas parciales de g. Abusando de la notación, podemos escribir, suponiendo que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, que:

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), \cdots y_m(\mathbf{x})).$$

En ese caso, tenemos que para los puntos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \in U$, se cumple $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$ o, para cada componente

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0.$$

Así, queremos determinar $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}$, para $i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n$. Con este fin, derivamos la última expresión respecto a la variable x_k, resulta:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{x_k} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0.$$

Para cada k fijo, como $i = 1, \ldots, m$, tenemos un sistema lineal de m ecuaciones y m incógnitas. La matriz de los coeficientes es $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\ldots m}$ y su fila i es el vector formado por las derivadas parciales de f_i respecto a las variables

Si llamamos A a la matriz de las derivadas parciales de f_i con respecto a y_j, entonces el determinante de A es distinto de 0 por el teorema de la función implícita, y por eso, tiene inversa, A^{-1}. La matriz columna de los términos independientes es $\left(-\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{i=1,\ldots m}$. Pero además, considerando $k = 1, \ldots, n$, tenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

donde las incógnitas son $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$. Como A tiene inversa, podemos obtener su solución:

$$A \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Otra forma de resolverla es utilizando la regla de Cramer para k fijo. En ese caso:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\dfrac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (y_1, \ldots, y_{i-1}, -x_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)} (\mathbf{x}, y(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (y_1, \ldots, \ldots, y_m)} (\mathbf{x}, y(\mathbf{x}))},$$

donde $\partial (f_1, \ldots, f_m)$ ... $(\mathbf{x}, y(\mathbf{x}))$ es el determinante de la matriz de las coe...

Para derivadas parciales de orden 2 o superior, seguimos este mismo procedimiento.

Ejemplo 23. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z, u, v) = \left(u + v + x^2 - y^2 + z^2, u^2 + v^2 + u - 2xyz\right)$$

1. Estudiar si f define a u y v como funciones implícitas diferenciables $(u, v) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ en un entorno de $\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2. Obtener la matriz jacobiana de dicha función implícita en caso de que exista.

Solución:

1. Tenemos $f(x, y, z, u, v) = (f_1(x, y, z, u, v), f_2(x, y, z, u, v))$, donde

   $$f_1(x, y, z, u, v) = u+v+x^2-y^2+z^2, \quad f_2(x, y, z, u, v) = u^2+v^2+u-2xyz,$$

   que son funciones continuas en $\mathbb{R}^5$. Además,

   $$f_1\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f_2\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

   $$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{array}\right|_{\left(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2u+1 & 2v \end{array}\right|_{\left(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| \neq 0.$$

   Luego se cumplen las condiciones para la existencia de función implícita y existe un subconjunto U de $\mathbb{R}^5$ que contiene a $\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, un entorno V de $(0, 0, 0)$ y una función $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ tales que:

   $$\begin{aligned} &\{(x, y, z, u, v) \in U : f(x, y, z, u, v) = 0\} = \\ &\qquad = \{(x, y, z, u, v) \in U : (x, y, z) \in V, (u, v) = g(x, y, z, u, v)\} \\ &\qquad = \{(x, y, z, g(x, y, z)) : (x, y, z) \in V\}. \end{aligned}$$

jacobiana en $P = \left(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ será

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}_P^{-1} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -\dfrac{\partial f_1}{\partial y} & -\dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ -\dfrac{\partial f_2}{\partial x} & -\dfrac{\partial f_2}{\partial y} & -\dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u+1 & 2v \end{pmatrix}_P^{-1} \begin{pmatrix} -2x & 2y & -2z \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix}_P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podíamos haber derivada implícitamente y luego haber resuelto el sistema. Partimos de

$$0 = f\left(x,y,z,g_1\left(x,y,z\right),g_2\left(x,y,z\right)\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 = g_1\left(x,y,z\right) + g_2\left(x,y,z\right) + x^2 - y^2 + z^2, \\ 0 = g_1^2\left(x,y,z\right) + g_2^2\left(x,y,z\right) + g_1\left(x,y,z\right) - 2xyz. \end{cases}$$

Derivamos estas expresiones respecto a x, y, z:

$$0 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial x} + 2x, 2g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + 2g_2\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} - 2yz\right),$$
$$0 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} - 2y, 2g_1\frac{\partial g_1}{\partial y} + 2g_2\frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial y} - 2xz\right),$$
$$0 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_2}{\partial z} + 2z, 2g_1\frac{\partial g_1}{\partial z} + 2g_2\frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{\partial g_1}{\partial z} - 2xy\right).$$

Tenemos un sistema de 6 ecuaciones y 6 incógnitas, que particularizando en $x = y = z = 0$, son:

$$0 = \frac{\partial g_1}{\partial x}\left(0,0,0\right) + \frac{\partial g_2}{\partial x}\left(0,0,0\right),$$
$$0 = -\frac{\partial g_1}{\partial x}\left(0,0,0\right) + \frac{\partial g_2}{\partial x}\left(0,0,0\right) + \frac{\partial g_1}{\partial x}\left(0,0,0\right) = \frac{\partial g_2}{\partial x}\left(0,0,0\right),$$
$$0 = \frac{\partial g_1}{\partial y}\left(0,0,0\right) + \frac{\partial g_2}{\partial y}\left(0,0,0\right),$$

Observe que aquí se ha tenido en cuenta que $g_1(0,0,0) = -\frac{1}{2}$, $g_2(0,0,0) = \frac{1}{2}$. Obviamente, la solución de estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0,0) &= \frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0,0) = 0, \\
\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0,0) &= \frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0,0) = 0, \\
\frac{\partial g_1}{\partial z}(0,0,0) &= \frac{\partial g_2}{\partial z}(0,0,0) = 0.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 24. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = 1 - e^{(x^7+y^2-xz-1)}.$$

Vamos a:

1. Encontrar el valor de a tal que en un entorno del punto $(1,0,a)$ la ecuación $f(x,y,z)$ defina implícitamente una función $z = g(x,y)$.
2. Calcular $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)$.
3. Calcular $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,0)$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,0)$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,0)$.

Comencemos:

1. Para que se verifiquen las hipótesis, en primer lugar f debe ser una función diferenciable con continuidad en un entorno de $(1,0,a)$, lo que se verifica ya que

$$f'(x,y,z) = -\left(7x^6 - z \quad 2y \quad - x\right) e^{(x^7+y^2-xz-1)}.$$

Además, debe ser $f(1,0,a) = 0$, que es lo mismo que $1 - e^{-a} = 0$, lo que implica $a = 0$. Finalmente, en el punto $(1,0,0)$ debe ser $D_3 f(1,0,0) \neq 0$. Como $D_3 f(x,y,z) = xe^{(x^7+y^2-xz-1)}$, entonces $D_3 f(1,0,0) = 1$, por lo que la función f verifica las hipótesis del teorema de la función implícita

Si derivamos esta expresión respecto a x y a y, tenemos

$$-\left(7x^6 - g(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)} = 0,$$
$$-\left(2y - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)} = 0.$$

Particularizando para $x = 1$, $y = 0$ y $g(1,0) = 0$, si sustituimos estas condiciones en la ecuación anterior obtenemos los valores de las derivadas parciales de g respecto a x y a y

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 7 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 0.$$

3. Derivando las ecuaciones del punto anterior respecto a las dos variables obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 = &\left(42x^5 - 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)\right.\\
&\left.+\left(7x^6 - g(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)},\\
0 = &\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - x\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)\right.\\
&\left.+\left(7x^6 - g(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\left(2y - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)},\\
0 = &\left(2 - x\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) + \left(2y - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)},\\
0 = &\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - x\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)\right.\\
&\left.+\left(2y - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\left(7x^6 - g(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\right) e^{(x^7+y^2-xg(x,y)-1)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $(x, y, g(x,y)) = (1, 0, 0)$, considerando los valores obtenidos en el segundo punto, se obtiene

Función inversa. Cambio de variable.

Consideramos dos espacios vectoriales, que llamamos E, F donde hay definida una distancia, y sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación entre ellos. En general, está aplicación no es biyectiva y por eso, no existe f^{-1}. Pero, dado un punto $a \in E$, sí que podemos dar condiciones para que existan un entorno V de $\mathbf{a}$ y otro entorno W de $f(\mathbf{a})$ para que haya una biyección entre V y W, y que así, exista f^{-1} en W.

Vamos a centrarnos en espacios normados de dimensión n, es decir, en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_n).$$

Si f es inyectiva, entonces su función inversa definida sobre $f(\mathbb{R}^n)$ se puede obtener si sabemos resolver el siguiente sistema (expresando las x_i en función de las y_i):

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Como esto es difícil en general, buscamos condiciones que nos permitan asegurar que esto se puede hacer (o afirmar que f tiene función inversa). Si f es una función lineal, en principio, podemos hacerlo (es un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas). Si f es diferenciable, entonces podemos utilizando el teorema de Taylor sabemos que $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ es una aproximación lineal de f en un entorno V de $\mathbf{a}$, porque

$$\lim_{x \to a} \frac{\|F(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Como la matriz de la aplicación lineal $Df(\mathbf{a})$ es su matriz jacobiana, entonces parece lógico pensar que f tiene inversa en un entorno de $\mathbf{a}$ si $\det f'(\mathbf{a}) \neq 0$.

Teorema 14. *Teorema de la función inversa. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en A, $\mathbf{a} \in A$*

3. Además, para cada $y \in W$ se cumple $\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$.

Ejemplo 25. Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x, y) = (\cos x + \cos y, \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y).$$

Vamos a buscar la o las opciones correctas:

a. Es localmente inversible en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

b. Posee inversa global.

c. No posee inversa global.

d. Ninguna de las anteriores.

Observamos que

$$f(x, y) = f(x + 2\pi, y + 2\pi).$$

Por tanto, no es inyectiva y no posee inversa global en $\mathbb{R}^2$.

Además, no en todos los puntos ha inversa local. Por ejemplo, en los puntos de la forma $(\varepsilon, -\varepsilon)$ y $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para ε suficientemente pequeño y positivo, tenemos:

$$f(\varepsilon, -\varepsilon) = f(-\varepsilon, \varepsilon),$$

por lo que la función no es inyectiva. Como no es inyectiva en un entorno de $(0, 0)$, entonces no va tener inversa local cerca de este punto. Por eso, no son ciertas ni la opción a) ni la opción b). Sólo es correcta la opción c).

∎

Ejemplo 26. Considérense las aplicaciones $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$f(x, y, z) = (e^{2x}, -ze^{y^2}, e^{-yz}),$$
$$g(x, y, z) = (x + y, x^2 + z, xz).$$

Tenemos las opciones siguientes:

Veamos que las opciones correctas son la b) y c).

Comprobamos dónde es diferenciable la función f. Es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, por ser cada una de las tres componentes de f de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ (por tratarse de productos y composiciones de la función exponencial con funciones polinómicas). Según el teorema de la función inversa, f admite inversa diferenciable en un entorno de cada punto donde el determinante jacobiano de f sea distinto de 0. Puesto que

$$\begin{aligned}\det f'(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 2e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & -2yze^{y^2} & -e^{y^2} \\ 0 & -ze^{-yz} & -ye^{-yz} \end{vmatrix} = 4y^2ze^{2x+y^2-yz} - 2ze^{2x+y^2-yz} \\ &= 2e^{2x+y^2-yz}z(2y^2-1),\end{aligned}$$

f admite inversa diferenciable en los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $z(2y^2 - 1) \neq 0$, es decir, en el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0 \text{ o } y \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

Por otro lado, las funciones f y g son de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, por tanto, su composición $f \circ g$ también lo es. Calculemos el jacobiano de g:

$$\det g'(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 1 \\ z & 0 & x \end{vmatrix} = z - 2x^2.$$

En virtud de la regla de la cadena, se tiene que

$$\det(g \circ f)'(x,y,z) = \det g'(f(x,y,z)) \det f'(x,y,z).$$

Por consiguiente, $g \circ f$ admite inversa diferenciable en los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $\det g'(f(x,y,z)) \neq 0$ y $\det f'(x,y,z) \neq 0$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}\det g'(f(x,y,z)) = \det g'(e^{2x}, -ze^{y^2}, e^{-yz}) = e^{-yz} - 2e^{4x} = 0 \iff e^{4x+yz} = \frac{1}{2} \\ \iff 4x + yz = -\ln 2,\end{aligned}$$

El teorema de la función inversa se puede aplicar en casos muy concretos de funciones con una finalidad muy concreta. Son los **cambios de variable.**

Proposición 15. *Si* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función de clase* 1 *en* A *y* $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$ *entonces la imagen de cualquier subconjunto abierto de* A *es un subconjunto abierto.*

Definición 16. *Cambio de variable. Sea* A *un abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Una aplicación* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *se dice que es un cambio de variable, aplicación regular o difeomorfismo de clase* q *si:*

1. $f \in C^q(A)$, $q \geq 1$.
2. $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $x \in A$.
3. f *es inyectiva en* A.

Proposición 17. *Si* f *es una aplicación regular de clase* q *en* A *(es decir, continua y con derivadas parciales hasta orden* q *continuas), entonces* $f(A)$ *es abierto y* $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ *es de clase* q *en* $f(A)$.

Ejemplo 27. Cambio de coordenadas polares a cartesianas y viceversa. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(\rho, \theta) = (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta).$$

Como $\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi)$ y $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)$ no es inyectiva global. Es inyectiva considerando que está definida sobre

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, -\pi < \theta < \pi \right\}.$$

Y en ese caso, f es un cambio de variable entre A y $f(A)$, donde $f(A)$ es $\mathbb{R}^2$ menos el semieje x negativo.

Las ecuaciones inversas son:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ para } (x, y) \in f(A).$$

La función f es de clase infinito y si jacobiano

$$\det f'(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

es distinto de 0 si $\rho \neq 0$.

Como $f(\rho,\theta,z) = f(\rho,\theta+2\pi,z)$, no es inyectiva. Sin embargo, con el mismo A de las coordenadas polares, es inyectiva en $A\times\mathbb{R}$ y f es un cambio de variable de $A\times\mathbb{R}$ sobre $f(A\times\mathbb{R})$.

Las ecuaciones inversas son:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ z = z \text{ para } (x,y,z)\in f(A\times\mathbb{R}).$$

$\blacksquare$

Ejemplo 29. Cambio de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi).$$

La función f es de clase infinito y su jacobiano cumple:

$$\det f'(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\varphi$$

es distinto de 0 si $\rho\neq 0$ o $\varphi\neq k\pi$.

Como $f(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho,\theta+2\pi,\varphi)$ (por ejemplo) no es inyectiva. Pero si consideramos

$$A = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : \rho>0, -\pi<\theta<\pi, 0<\varphi<\pi\right\},$$

entonces f es inyectiva en A y f es un cambio de variable de A sobre $f(A)$.

Las ecuaciones inversas son:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Para ello, partimos del determinante de la matriz jacobiana:

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x.$$

Como $\det f'(0,y) = 0$ para todo $y \in [0,1]$, podemos asegurar que no es un cambio de variable.

Ejemplo 31. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un cambio de variable. ¿Pueden existir $a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$?

La respuesta es no, porque en ese caso no sería inyectiva.

1.4. Combinaciones baricéntricas

Nota importante

El estudio de los apartados Coordenadas baricéntricas y Transformaciones afines no deben hacerse de forma exclusiva con este documento. Deben estudiarse también los apartados correspondientes de "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones".

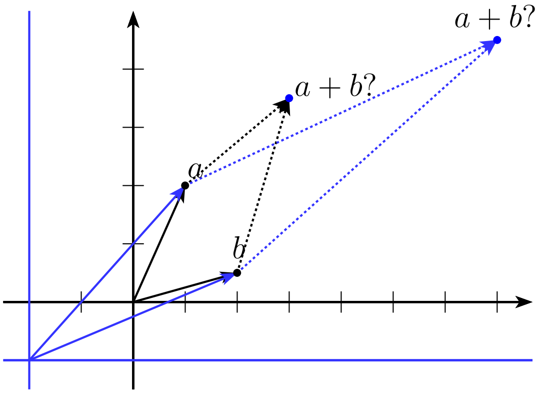
Cuando queremos describir un objeto matemáticamente, lo que es un primer paso si queremos trabajar con él a través de un ordenador, necesitamos un sistema de coordenadas. Un ejemplo conocido son las coordenadas de un vector de un espacio vectorial a partir de los elementos de una base suya, o los cambios de coordenadas. Además nos interesa el objeto en sí y no su relación con un sistema de coordenadas determinado. Esto significa que vamos a trabajar con herramientas que son independientes del sistema de coordenadas elegido.

Vamos a trabajar en un espacio bidimensional (o tridimensional), que vamos a llamar espacio afín. Los denotamos, respectivamente, $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{E}^3$. Sus elementos son puntos, que vamos a denotar con las letras (minúsculas en son vectores, que denotamos con las letras, también minúsculas en negrita, $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, y sucesivas.

Podemos escribir los puntos y los vectores como matrices fila o como matrices columna.

Aunque escribimos igual los puntos y los vectores, no son lo mismo. Los puntos indican posición y los vectores indican movimiento o desplazamiento. Por eso, podemos sumar y restar vectores, y podemos multiplicar vectores por escalares (por números reales, en nuestro caso).

No podemos sumar puntos ni multiplicarlos por escalares, como se ve en la siguiente figura.



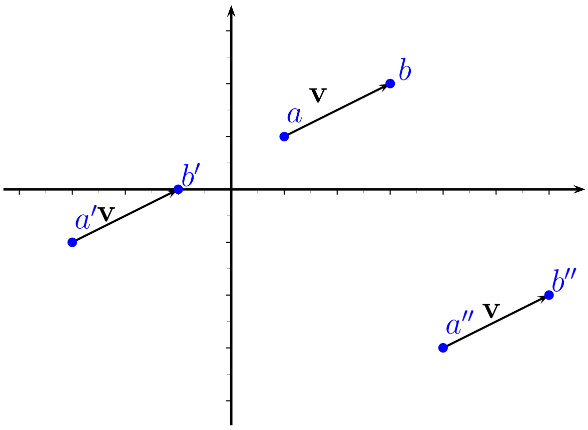
Pero podemos "restarlos" y el resultado es un vector. Por un lado, dos puntos cualesquiera, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ determinan un único vector que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Lo podemos determinar restando las coordenadas una a una:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en $\mathbb{E}^2$, entonces $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en $\mathbb{E}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Pero, por otro lado, dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$, hay infinitos pares de puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. De hecho, si tenemos un par $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ con esta característica, también lo van a cumplir $\mathbf{a} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{b} + \mathbf{w}$ para cualquier vector $\mathbf{w} \in\mathbb{R}^3$.

Un ejemplo de esto lo tenemos en la siguiente figura.



Sin embargo, se pueden definir operaciones similares con los puntos. Por ejemplo, si tenemos un segmento definido por su extremos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{E}^2$ o en $\mathbb{E}^3$, entonces su punto medio está dado por la posición

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Parece una suma de puntos, pero en realidad es una posición más un desplazamiento (un punto más un vector), al haberlo reescrito como $\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Observamos que se hace una "combinación lineal" con los puntos, donde la suma de los coeficientes es 1. De la misma forma, el segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ está descrito por la ecuación

$$t\mathbf{a} + (1-t)\,\mathbf{b}, \text{ para } t \in [0,1].$$

Para cualquier t, el punto resultante está en el segmento y además, para cualquier punto del segmento existe un t de tal forma que se para ese t tenemos el punto. Observamos que en las dos ecuaciones anteriores, la clave está en que la suma de los coeficientes es 1, porque de nuevo podemos escribir

$i = 0, \ldots, m$ y con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, decimos que

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i$$

es la **combinación baricéntrica** de los puntos $\mathbf{a}_i$ con pesos (o coordenadas baricéntricas) λ_i. Señalamos que aunque parece una suma de puntos, en realidad se puede reescribir como la suma de un punto más una combinación lineal de vectores, porque

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0\right).$$

Ejemplo 32. El centro de gravedad del cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$ y $(0,1)$ es la combinación baricéntrica de estos puntos de coordenadas $\lambda_i = \frac{1}{4}$:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4}(0,0) + \frac{1}{4}(1,0) + \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

De hecho, el baricentro es el centro de gravedad, y señalamos que el nombre de coordenadas baricéntricas se deriva del término baricentro.

Para entender bien las coordenadas baricéntrica, vamos a definir referencia afín. Se dice los puntos $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_n$ forman una **referencia afín** de $\mathbb{R}^n$ si los vectores $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_0\mathbf{p}_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$. Si tenemos una referencia afín $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_n$, entonces cualquier punto $\mathbf{p}$ se escribe de forma única como una combinación baricéntrica

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{p}_i.$$

Ejemplo 33. Vamos a comprobar que los puntos $\mathbf{p}_0 = (1,1)$, $\mathbf{p}_1 = (2,1)$ y $\mathbf{p}_2 = (2,-1)$ son una referencia afín?

Veamos que los siguientes vectores son linealmente independientes:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (2,1) - (1,1) = (1,0),$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2,-1) - (1,1) = (1,-2).$$

El determinante de la matriz que forman es

Ejemplo 34. Vamos a encontrar las coordenadas baricéntricas del punto $\mathbf{p} = (0,0)$ en la referencia afín $\mathbf{p}_0 = (1,1)$, $\mathbf{p}_1 = (2,1)$ y $\mathbf{p}_2 = (2,-1)$.

Tenemos que encontrar λ_0, λ_1 y λ_2 tales que

$$(0,0) = \lambda_0(1,1) + \lambda_1(2,1) + \lambda_2(2,-1),$$

con $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(0,0) &= \lambda_0(1,1) + \lambda_1(2,1) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(2,-1) \\ &= (-\lambda_0 + 2, 2\lambda_0 + 2\lambda_1 - 1)\,.\end{aligned}$$

Entonces obtenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 + 2, \\ 0 &= 2\lambda_0 + 2\lambda_1 - 1. \end{aligned}\right\}$$

Obviamente

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 2, \\ 2\lambda_1 &= -2\lambda_0 + 1 = -4 + 1 = -3 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Utilizar la relación entre las coordendas baricéntricas obtenemos λ_2:

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 = 1 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$(0,0) = 2(1,1) - \frac{3}{2}(2,1) + \frac{1}{2}(2,-1).$$

Un caso importante de coordenadas baricéntricas son la clausura convexa de un conjunto de puntos. Dado un conjunto de puntos $\mathbf{a}_i, i = 1 \cdots n$, la clausura convexa de estos puntos es el conjunto de combinaciones baricéntricas de los puntos $\{\mathbf{a}_i, i = 1 \cdots n\}$ de modo que las coordenadas baricéntricas (también llamadas pesos), además de sumar 1, son no negativas. Es decir, son los puntos $\mathbf{a}$ tales que

1.5. Transformaciones afines

Una transformación afín o afinidad en el plano está dada por la ecuación

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz no singular de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{b} = (b_0, b_1)^t$ representa una traslación.

De la misma forma, podemos considerar las transformaciones afines o afinidades en el espacio como las transformaciones dadas por la ecuación

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz no singular de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2)^t$ es una traslación.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ entonces la transformación es la **identidad**:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, entonces la transformación es una **traslación** de vector $\mathbf{b}$:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Ejemplo 35. La transformación

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$

es una traslación de vector $(1, 0)$. $\blacksquare$

Ejemplo 36. La transformación

Ejemplo 37. La transformación en $\mathbb{E}^3$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

es la proyección sobre el plano xy. No es una transformación afín, porque la matriz es singular.

■

Ejemplo 38. Una homotecia es una transformación afín que a partir de un punto fijo, multiplica las distancias por el mismo número. Si el punto fijo es el origen, está representada por una matriz diagonal $\mathbf{A}$ y un vector $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, la transformación

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}.$$

■

Ejemplo 39. Si la matriz $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal, y $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces la transformación f reescala cada uno de los ejes por los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}$ correspondientes. Por ejemplo, la transformación

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

multiplica la primera componente por 2, la segunda por -1 y la tercera permanece igual. ■

Las transformaciones afines no respetan, en general, cualquier combinación lineal de puntos, porque

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + \mathbf{b} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \\ \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) &= \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}\mathbf{y} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{b} \\ &\neq f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \end{aligned}$$

cuando $\lambda + \mu \neq 1$. Es decir, cuando hay una traslación, la afinidad no respeta las combinaciones lineales de dos puntos, excepto si tenemos una combinación baricéntrica.

Por este motivo, las afinidades transforman segmentos en segmentos y rectas en rectas. Y además, respetan las proporciones entre segmentos de una recta.

Ejemplo 40. Sea f la transformación dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$2f(1,0) - f(0,1) = f(2(1,0) - (0,1)).$$

En efecto, como $2-1=1$, $2(1,0)-(0,1)$ es una combinación baricéntrica de los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ y la transformación es afín, debe cumplirse.Vamos a comprobar la afirmación:

$$\begin{aligned} f(2(1,0)-(0,1)) &= f(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ 2f(1,0)-f(0,1) &= 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

∎

Si $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal (es decir $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$), entonces la transformación es una **isometría**. Conserva las distancias, es decir

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})).$$

Vamos a demostrarlo viendo que el cuadrado de ambas distancias es el mismo, porque

$$\begin{aligned} d^2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 = \langle f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}), \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ejemplo 41. La transformación plana dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es un giro de π radianes, ya que

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

La transformación plana dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

es un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes más una traslación con vector $(1,-1)$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

En general, la transformación plana dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

es un giro de θ radianes. $\blacksquare$

Ejemplo 42. Un giro de θ radianes respecto al eje x está dado por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. $\blacksquare$

Un **movimiento** en $\mathbb{E}^2$ es una isometría donde el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ es 1. La matriz $\mathbf{A}$ de cualquier movimiento plano es un giro de θ radianes y, por tanto, es de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A menudo, estas transformaciones han sido llamadas movimientos directos y

Ejemplo 43. Determinemos los movimientos que transforman el segmento $[(0,0),(0,1)]$ en el segmento $[(1,0),(2,0)]$.Como es un movimiento, sabemos que f debe estar dada por

$$f(x,y)^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta + b_1 \end{pmatrix}.$$

Además, sabemos que hay dos posibilidades: $(0,0)$ se transforma en $(1,0)$ y $(0,1)$ en $(2,0)$ o $(0,0)$ se transforma en $(2,0)$ y $(0,1)$ en $(1,0)$. El primer caso se reduce a

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0\cos\theta - 0\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 0\operatorname{sen}\theta + 0\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(0,1) &= \begin{pmatrix} 0\cos\theta - 1\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 0\operatorname{sen}\theta + 1\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 1\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} b_0 = 1, \\ b_1 = 0, \\ -\operatorname{sen}\theta + 1 = 2, \\ \cos\theta + 0 = 0. \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} b_0 = 1, \\ b_1 = 0, \\ \operatorname{sen}\theta = -1, \\ \cos\theta = 0, \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow b_0 = 1, b_1 = 0, \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

En este caso, la transformación sería un giro de $\frac{3\pi}{2}$ radiantes más una traslación de vector $(1,0)$

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para el segundo caso, tenemos

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0\cos\theta - 0\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 0\operatorname{sen}\theta + 0\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(0,1) &= \begin{pmatrix} 0\cos\theta - 1\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 0\operatorname{sen}\theta + 1\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\operatorname{sen}\theta + b_0 \\ 1\cos\theta + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resulta el sistema:

1.6. Ejercicios

1. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$, el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

para $f,g \in C[0,1]$. Determine un polinomio de grado 2 que sea ortogonal a $f(x) = x-3$.

Solución: Si $g(x)$ es un polinomio de grado 2, debe ser de la forma $g(x) = ax^2+bx+c$. Para que sea ortogonal a $f(x)$ debe cumplirse

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle &= \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 (x-3)\left(ax^2+bx+c\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(ax^3+bx^2-3ax^2+cx-3bx-3c\right)dx \\
&= a\int_0^1 x^3dx + (b-3a)\int_0^1 x^2dx + (c-3b)\int_0^1 xdx - 3c\int_0^1 dx \\
&= a\frac{1}{4}\,x^4\Big|_0^1 + (b-3a)\,\frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 + (c-3b)\,\frac{1}{2}\,x^2\Big|_0^1 - 3c\,x\Big|_0^1 \\
&= \frac{a}{4}+\frac{b-3a}{3}+\frac{c-3b}{2}-3c \\
&= \frac{3a+4b-12a+6c-18b-36c}{12} \\
&= \frac{-9a-14b-30c}{12} = 0
\end{aligned}$$

Esto ocurre, por ejemplo, si $a=10, b=0, c=-3$, siendo en este caso, $g(x) = 10x^2-3$

2. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$ el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx,$$

Solución: $(1,2,3,4)\cdot(-1,-2,-3,-4) = 1\,(-1)+2\,(-2)+3\,(-3)+4\,(-4) = -1-4-9-16 = -30.$

$\|(1,2,3,4)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30}.$

$\|(-1,-2,-3,-4)\| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+(-4)^4} = \sqrt{30}.$

4. Sean E un espacio vectorial normado tal que su norma $\|\cdot\|$ proviene de un producto escalar. Probar que si x, $y\in E$ verifican que $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$, entonces x e y son linealmente dependientes.

   Solución: Como $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ y $\|\cdot\|$ proviene de un producto escalar, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|$, es decir,

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\,\langle x,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|$$

   y por tanto

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|.$$

   Razonando por reducción al absurdo, si x e y no son linealmente dependiente entonces se cumple que $x-\lambda y\neq 0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$. Por consiguiente

$$\|x-\lambda y\| > 0 \qquad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{R}.$$

   Entonces

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\lambda\,\langle x,y\rangle + \lambda^2\,\langle y,y\rangle > 0 \qquad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{R}.$$

   (razonando como en la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz) la ecuación anterior en λ no puede tener una raíz real y, por tanto, su discriminante es menor que cero

$$|\,\langle x,y\rangle\,|^2 - \langle y,y\rangle\,\langle x,x\rangle < 0.$$

   Pero como $\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|$ se cumple que

$$|\,\langle x,y\rangle\,|^2 - \langle y,y\rangle\,\langle x,x\rangle = \|x\|^2|y\|^2 - \langle y,y\rangle\,\langle x,x\rangle = 0$$

   lo cual es una contradicción. Luego existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $x=\lambda y$ o

Estudiar si existen derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ y determinarlas en caso de que existan. ¿Es f una función diferenciable en $(0,0)$?

Solución: Si se considera que f no está definida en $(0,y)$, entonces no existen derivadas de f en el origen, no siendo tampoco diferenciable.

Por otra parte, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sinx}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos x = 1,$$

podríamos considerar $f_2(0,t) = 1$ y $f(0,t) = (|t|, 1)$ para garantizar la continuidad de f en el origen. En este caso,

$$D_1 f_1(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t| - 0}{t}$$

que tampoco existe. Igualmente, no existe $D_2 f_1(0,0)$. Para f_2

$$D_1 f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(t,0) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t - t}{t^2} = 0$$
$$D_2 f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(0,t) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

por lo que sí que existirían las derivadas parciales de f_2. Pero como no existen $D_1 f_1(0,0)$ y $D_2 f_1(0,0)$, en ninguno de los dos casos es f una función diferenciable.

6. Razone si es cierto que una función de clase uno, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\det f'(x,y) \neq 0$ en cualquier punto de $\mathbb{R}^2$, cumple:

   a) Es invertible en un entorno de cualquier punto de $\mathbb{R}^2$,

   b) Es inyectiva,

   c) Es lineal.

   d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Es cierta la opción **a)** por el Teorema de la función inversa.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x, y) = (ye^x, xy).$$

¿En qué puntos podemos asegurar que f tiene inversa local?

Solución: Comprobamos dónde se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa. Como cada una de las componentes son infinitamente derivables, f es una función de clase infinito. El determinante de la matriz jacobiana en un punto (x, y) es

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} ye^x & e^x \\ y & x \end{vmatrix} = xye^x - ye^x = ye^x(x-1).$$

Podemos asegurar que tiene inversa local si este determinante es distinto de 0 y esto ocurre si

$$y \neq 0, \quad x \neq 1.$$

Así, los puntos en los que podemos asegurar que f tiene inversa local es en los $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \text{ y } x \neq 1\}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y).$$

Elija los puntos en los que f tiene inversa local en un entorno suyo:

a) $(0, 0)$
b) $(1, 1)$
c) $(0, 1)$
d) Ninguna de las anteriores.

Nota: Nótese que el Teorema de la función inversa da condiciones suficientes, pero no necesarias para que una función tenga inversa en un punto. Por eso, aunque en un punto no se cumplan las condiciones, la función puede tener inversa, y entonces ahí hay que estudiar si aún así, la función es invertible.

Solución: Es correcta la opción b).

Podemos asegurar que f tiene inversa local en un entorno de cada punto en donde este determinante es distinto de 0. Como se anula en los puntos de la forma $(0, y)$, sabemos que la respuesta b) es correcta.

Pero aunque en los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ el determinante sea 0, no podemos asegurar que no tenga inversa (el Teorema de la función inversa da condiciones suficientes). Por eso, vamos a buscar una expresión de la posible inversa de f y ver si en entornos de estos puntos, existe.

Podemos calcular la inversa de la función despejando:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = u \\ x^2 - y = v \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{array}\right\}$$

Entonces, como obtenemos una expresión de x^2 en función de u y v, si intentamos despejar, para cada valor de u y v obtenemos dos valores de x. Y por esto, observamos que en cualquier entorno de un punto de la forma $(0, y)$, existen dos puntos en él de la forma (ε_1, y) y $(-\varepsilon_1, y)$, tales que la imagen de estos puntos por f es la misma. Por eso, la función no es inyectiva y por tanto, no tiene inversa local en estos puntos. Así podemos concluir que las opciones a) y c) no son correctas.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = x^3 - y^3 - y^2 x + 1$. Elija la opción correcta.

   a) La función f define una función implícita $y = \varphi(x)$ en un entorno de $(0, 0)$.

   b) La función f define una función implícita $y = \varphi(x)$ en un entorno de $(0, 1)$.

   c) Ninguna de las anteriores.

Solución: Es correcta la opción **b)**.

Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita en $(0, 1)$. La función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica y se tiene que $f(0, 1) = 0$. Puesto que se trata de despejar la variable y, hay que comprobar que $D_2 f(0, 1) \neq 0$:

una única función $\varphi : V \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ en V tales que $D_2 f(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in U$ y

$$\{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in U : x \in V, y = \varphi(x)\}.$$

Luego en el entorno U de (0,1) f define la función implícita $y = \varphi(x)$.

En el punto $(0,0)$; no se tiene que $f(0,0) = 0$, por tanto, la opción **a)** no es correcta.

10. Se considera la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = 1 - e^{(x^5+y-xz-1)}.$$

Elija la o las opciones correctas:

a) Si $a = 0$, podemos asegurar que la función (x,y,z) define implícitamente una función $z = g(x,y)$ en un entorno de $(1,0,a)$.

b) Si $a = 1$, podemos asegurar que la función (x,y,z) define implícitamente una función $z = g(x,y)$ en un entorno de $(1,0,a)$.

c) Si $a = -1$, podemos asegurar que la función (x,y,z) define implícitamente una función $z = g(x,y)$ en un entorno de $(1,0,a)$.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Vamos a ver para qué valores de a se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita. Para que se verifiquen las hipótesis, en primer lugar f debe ser una función diferenciable con continuidad en un entorno de $(1,0,a)$, lo que se verifica ya que f tiene diferencial, que es

$$f'(x,y,z) = \left(-\left(5x^4 - z\right) e^{(x^5+y-xz-1)}, -e^{(x^5+y-xz-1)}, xe^{(x^5+y-xz-1)}\right).$$

Y a su vez es continua, por ser producto de funciones continuas. Además, debe ser $f(1,0,a) = 0$, que es lo mismo que $1 - e^{-a} = 0$, lo que implica $a = 0$. Finalmente, en el punto $(1,0,0)$ debe ser $D_3 f(1,0,0) \neq 0$. Como

11. Sea g la función $x = g(y,z)$ definida implícitamente en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1,-1,1)$ por la función $F(x,y,z) = x^2 - \ln(xyz) - (x+z)^2 - 5y - 6 = 0$ ¿es diferenciable en $(y_0, z_0) = (-1,1)$? Razone la respuesta.

    Solución: Sí, porque $D_1F(-1,-1,1) \neq 0$ y $F(-1,-1,1) = 0$. El teorema de la función implícita garantiza que g es diferenciable en su entorno de definición.

12. Sean los puntos $\mathbf{p}_0 = (0,1)$, $\mathbf{p}_1 = (1,1)$, $\mathbf{p}_2 = (2,-1)$. ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determínenense las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de un punto (x,y) respecto a esta referencia.

    Solución: Comprobamos que son una referencia afín. Veamos que los siguientes vectores son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (1,1) - (0,1) = (1,0)\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2,-1) - (0,1) = (2,-2)\,. \end{aligned}$$

Podemos comprobar que son linealmente independientes viendo que no es 0 el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Por tanto, base de $\mathbb{R}^2$, ya que son dos vectores linealmente independientes y las bases de $\mathbb{R}^2$ están formadas por dos vectores.

Las coordenadas baricéntricas de un punto (x,y) son

$$(x,y) = \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,-1),$$

con $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces

$$\begin{aligned} (x,y) &= \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,1) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(2,-1) \\ &= (-2\lambda_0 - \lambda_1 + 2, 2\lambda_0 + 2\lambda_1 - 1)\,. \end{aligned}$$

Entonces obtenemos las ecuaciones

Sustituyendo esta igualdad en la segunda ecuación, tenemos el valor de λ_0:

$$2\lambda_0 = -x - \lambda_1 + 2 = -x - x - y + 1 + 2 = -2x - y + 3$$
$$\Longrightarrow \lambda_0 = -x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}.$$

Y ya sólo nos queda utilizar la relación entre las coordenadas baricéntricas para tener λ_2:

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 = 1 + x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} - x - y + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y.$$

Estas son las coordenadas baricéntricas.

13. Dada la afinidad

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

determínese la imagen de la recta $y = x + 2$ por esta aplicación afín.

Solución: Los puntos de la recta $y = x + 2$ son de la forma $(x, x+2)^t$. Su imagen por f es

$$f(x, x+2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+5 \\ -x-2 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos los puntos de la forma

$$\begin{pmatrix} 3x+5 \\ -x-2 \end{pmatrix}.$$

Esto es lo mismo que escribir que son los puntos (x, y) que cumplen:

$$x = 3\lambda + 5, \quad y = -\lambda - 2,$$

o, considerando $\lambda = -y - 2$, la recta

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 2. Inicio al estudio de curvas

Versión 2.0

Índice general

1. Ejemplos de curvas. Visualización en el ordenador. 4
2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador. 12
   2.1. Polinomios de Bernstein 13
   2.2. Curvas de Bézier 16
3. Curva regular. Primeras definiciones y resultados. 22

1. Ejemplos de curvas. Visualización en el ordenador.

Intuitivamente, una curva es la trayectoria de una partícula o de un móvil en un plano o en el espacio. Podemos suponer que depende del tiempo, sin perder generalidad. En ese caso, decimos que la posición está dada por la función $\mathbf{x}(t)$. Si estamos en el plano, es $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, mientras que si estamos en el espacio, tenemos $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. En general, podemos escribir $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Vamos a centrarnos en curvas en el plano, pero sabiendo que el estudio que vamos a hacer puede extrapolarse a curvas en un espacio de dimensión mayor, para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ que son, en cierto sentido, unidimensionales o que dependen de un único parámetro.

La velocidad de la partícula está dada por la función (en caso de que exista)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}.$$

Como vamos a trabajar con curvas donde este vector exista (vamos a utilizar herramientas del cálculo diferencial), vamos a pedir que la función $\mathbf{x}(t)$ sea diferenciable hasta donde necesitemos.

Por otro lado, si conocemos la posición inicial (en el instante t_0) de la partícula, que es $\mathbf{x}_0$, y su velocidad $\mathbf{v}(t)$, podemos reconstruir su trayectoria, sin más que hacer:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(s)\, ds.$$

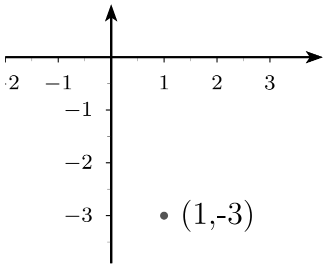
La aceleración de una curva es la derivada de la velocidad, es decir es $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}.$$

Vamos a comenzar con el estudio de algunas curvas.

Ejemplo 1. Un punto es una curva. Si sus coordenadas son (a, b), su ecuación es

$$\mathbf{x}(t) = (a, b)$$



Ejemplo 2. Una recta es el movimiento que describe una partícula moviéndose con velocidad uniforme, es decir, su velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = (v_1, v_2).$$

Entonces, si en un instante $t = t_0$ pasa por el punto (a, b), determinamos la ecuación a partir de la velocidad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(s)\,ds &= (a, b) + \left(\int_{t_0}^{t} v_1(s)\,ds, \int_{t_0}^{t} v_2(s)\,ds\right) \\
&= (a, b) + \left(\int_{t_0}^{t} v_1 ds, \int_{t_0}^{t} v_2 ds\right) \\
&= (a + v_1 t - v_1 t_0, b + v_2 t - v_2 t_0).
\end{aligned}$$

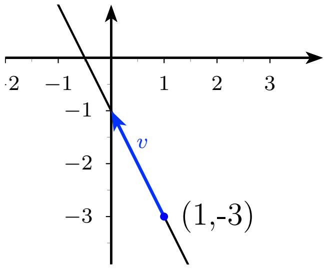
Sus coordenadas son:

$$\begin{aligned}
x &= a + v_1 (t - t_0), \\
y &= b + v_2 (t - t_0).
\end{aligned}$$

Obviamente, es la ecuación de una recta que pasa por (a, b) y con vector director (v_1, v_2). En la figura se representa para $(a, b) = (1, -3)$ en $t = 0$ y $v = (-1, 2)$, cuya ecuación es

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t, -3 + 2t).$$

Una recta puede ser recorrida a velocidad no constante.



Un vector director es $(1,-3)$. La velocidad con la que se recorre es:

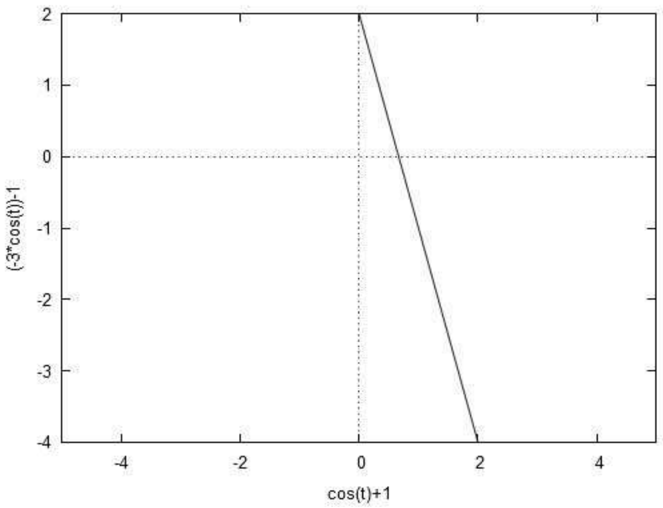
$$\mathbf{v}(t) = (-\operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen} t).$$

Como su módulo es $\sqrt{10}\operatorname{sen} t$, no es constante. Su aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = (-\cos t, 3\cos t).$$

Su módulo es $\sqrt{10}\cos t$, que tampoco es constante.

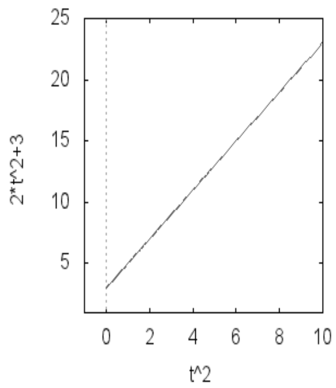
Se representa con `wxplot2d([['parametric, 1+cos(t), -1-3*cos(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$`. El resultado es:



En este caso, la aceleración es constante.

Se representa con `wxplot2d([['parametric, t^2, 3+2*t^2, [t, -6, 3], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,0,25],[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$`.

El resultado es:



Ejemplo 5. Una circunferencia es una curva donde todos los puntos están a la misma distancia de uno dado, que es el centro. La distancia se llama radio. Sus puntos cumplen la ecuación, para radio r y centro $\mathbf{p}_0 = (c_1, c_2)$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

Puede parametrizarse con

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_0 + (r\cos t, r \operatorname{sen} t).$$

Se recorre con una velocidad

$$\mathbf{v}(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t),$$

y la aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r \operatorname{sen} t).$$

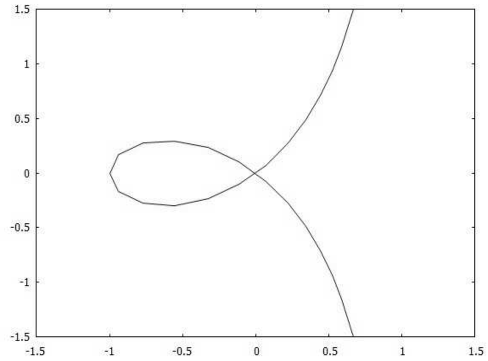
las componentes están dadas por funciones racionales. Su velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \left(4\frac{t}{(1+t^2)^2}, -\frac{t^4-1+4t^2}{(1+t^2)^2}\right)$$

y su aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \left(-4\frac{-1+3t^2}{(1+t^2)^3}, 4t\frac{t^2-3}{(1+t^2)^3}\right).$$

Se representa a continuación:



Ejemplo 7. Las dos componentes de la curva de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2\right)$$

son polinomios. Su velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \left(3t^2, 2t\right)$$

y su aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = (6t, 2).$$

Se representa en la siguiente figura

En este último ejemplo hemos visto que las componentes son polinomios. Es un caso de las curvas polinómicas. Sus componentes son polinomios de grado $n \geq 1$, y podemos escribirlas como

$$\mathbf{x}(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n),$$

donde algunos coeficientes pueden ser 0. Por ejemplo, si $a_{n-1} = a_n = 0$, entonces el grado de la primera componente es $n - 2$.

Ejemplo 8. Curvas polinómicas son, por ejemplo, las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(1 + t - 3t^3, t^3 + t^5\right), \\ \mathbf{y}(t) &= \left(-4 - 3t - t^2 - t^3, -1 + t - 2t^2 - t^3\right), \\ \mathbf{w}(t) &= \left(3t, 1 + 4t^2\right). \end{aligned}$$

Observamos que las curvas polinómicas están controladas por $n + 1$ coeficientes, como mucho, por cada componente. Podemos escribir estos coeficientes como puntos de $\mathbb{R}^2$, que llamamos $\mathbf{v}_i$, para escribir la curva como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{v}_i t^i.$$

Ejemplo 9. En el ejemplo anterior, podemos escribir las curvas como

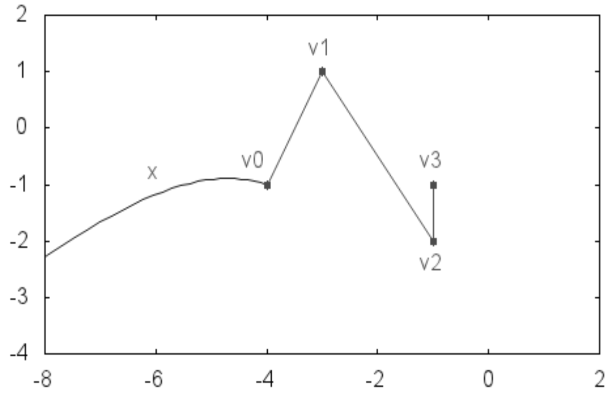
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (1, 0) + (1, 0)\, t + (-3, 1)\, t^3 + (0, 1)\, t^5 \\ \mathbf{y}(t) &= (-4, -1) + (-3, 1)\, t + (-1, -2)\, t^2 + (-1, -1)\, t^3, \\ \mathbf{w}(t) &= (0, 1) + (3, 0)\, t^3 + (0, 4)\, t^4. \end{aligned}$$

En la curva $\mathbf{x}(t)$ los puntos $\mathbf{v}_i$ son

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_0 = (1, 0), \ \mathbf{v}_1 = (1, 0), \ \mathbf{v}_3 = (-3, 1), \\ &\mathbf{v}_5 = (0, 1), \ \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_4 = (0, 0). \end{aligned}$$

Para $\mathbf{y}(t)$ tenemos

Representamos los puntos y la función $\mathbf{y}(t)$, en la siguiente gráfica, que se ha hecho con `Maxima`:



En esta gráfica, vemos que la curva dada por los puntos no describe el polígono que une estos puntos.

Una de las explicaciones a la afirmación anterior es que si transformamos los $\mathbf{v}_i$ por una afinidad $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, entonces la curva que describen los transformados no coincide con la transformada de la curva, es decir, en general se tiene que:

$$f(\mathbf{x}(t)) \neq \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{v}_i)\, t^i.$$

Ejemplo 10. Veamos con un ejemplo que la curva transformada mediante una afinidad no coincide con la curva asociada al polígono transformado.

Tomamos la curva dada por:

$$\mathbf{x}(t) = (1,-1) + (1,0)\,t + (2,-2)\,t^2 = \left(1 + t + 2t^2, -1 - 2t^2\right) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{v}_i t^i,$$

donde

$$\mathbf{v}_0 = (1,-1)\,, \quad \mathbf{v}_1 = (1,0)\,, \quad \mathbf{v}_2 = (2,-2)\,.$$

Elegimos la afinidad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t - 2t^2 - 1 \\ 2t^2 + 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} f\left(\mathbf{v}_i\right) t^i &= \sum_{i=0}^{2} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b} t^i \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} t^2 \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \\
&= \begin{pmatrix} t - 2t^2 - 1 \\ t + 3t^2 + 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ambas curvas son distintas porque si las representamos gráficamente vemos que no coinciden. Lo podemos hacer en `Maxima` con

```
wxplot2d([['parametric, t-2*t^2-1,2*t^2+2, [t,0,1], [nticks,300]],
['parametric, t-2*t^2-1,t+3*t^2+2, [t, 0, 1], [nticks, 300]]],
[legend,false]);.
```

$\blacksquare$

Esta relación entre polígono y curva se puede mejorar escribiendo los polinomios respecto a una base adecuada, y no respecto a la base estándar $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. En la búsqueda de una mejor relación entran en juego las

2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador.

El diseño de curvas ha sido importante para la ingeniería desde tiempos antiguos. El primer registro de uso industrial de curvas se remonta a los romanos, y su finalidad era la construcción de barcos. Utilizaban una especie de moldes reutilizables para construir las cuadernas que conforman el casco del barcos. Más adelante, en tiempo de la República de Venecia, se perfeccionaron estas técnicas, haciendo que las cuadernas estuvieran dadas por unos puntos por los que debían pasar, dando lugar a los splines.

Más adelante, con el desarrollo de la industria aeronáutica y automovilística, se perfeccionaron esos métodos. En la década de 1950 de añadió el diseño numérico, utilizando ordenadores y desarrollando lenguajes y programas con este fin. Pero permanecía un problema: el diseño se basaba en un modelo maestro, ya fuera físico, sobre un papel o con datos en un ordenador, y el resultado final no siempre coincidía con el diseño original. En la segunda mitad del siglo XX, hacia 1960, el esfuerzo de muchos ingenieros, matemáticos y físicos trabajando en el diseño de la carrocería de aviones y automóviles se concentró en resolver estas dificultades.

En este contexto, el matemático Paul De Casteljau diseñó, mientras trabajaba en Citroën, un algoritmo para el diseño de curvas que fueran escalables y que resolvieran el problema de las diferencias entre el diseño y su materialización. La idea era definir la curva a partir de unos puntos, pero que no estuvieran necesariamente en ella. Estos puntos definían, de alguna forma, direcciones tangentes a la curva, pero la curva no debía pasar por ellos. Por eso, cambios en los puntos inducen cambios en la la forma de la curva, pero de forma más suave. Por las ventajas económicas que suponía para Citroën, este sistema fue mantenido en secreto al menos hasta 1964.

Casi simultáneamente, Pierre Étienne Bézier, ingeniero francés, desarrolló de forma independiente el mismo sistema sistema de diseño asistido por ordenador mientras trabajaba en Renault y lo aplicó para el diseño de carrocerías de los coches. El resultado es conocido como curvas y superficies de Bézier, de gran importancia en el diseño actual.

Los gráficos vectoriales se basan, mayoritariamente, en las curvas y superficies de Bézier. Para obtener un gráfico vectorial se almacenan unos puntos sólo del polígono de control, que son "suaves" (diferenciables en terminología matemática), totalmente escalables o son muy versátiles pudiendo adoptar formas similares a la recta o el plano o mucho más complejas (dependiendo del número de puntos del polígono de control y de su posición).

Finalmente, señalamos que las curvas y superficies de Bézier son actualmente empleadas en programas como Adobe Illustrator, CorelDRAW o Inkscape. Además, son las curvas estándar utilizadas en PostScript o en las fuentes escalables TrueType and PostScript Type 1.

Ya hemos repasado qué es una afinidad y las coordenadas baricéntricas. Podemos comenzar el estudio de esta parte con el apartado 2.2.3 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, dedicado al algoritmo de Jarvis. Una implementación del mismo en Maxima está en el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

Debemos continuar con la lectura de este apartado. Los apartados 2.2.4. Polinomio de Bernstein y 2.2.5. Curvas de Bézier complementan lo aquí explicado. Se debe finalizar con el apartado 2.2.6. El algoritmo de De Casteljau, del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

2.1. Polinomios de Bernstein

Una curva plana polinómica es una curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)),$$

donde $x(y), y(t)$ son polinomios de grado n.

De forma similar, una curva polinómica en el espacio es una curva definida por una expresión de la forma

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x(y), y(t), z(t)$ son polinomios de grado n.

En los dos casos, las funciones $x(t), y(t)$ (y $z(t)$, en su caso) se pueden escribir a partir de polinomios de una base del espacio vectorial formado por los polinomios de grado n. Este espacio vectorial tiene dimensión $n+1$ y una base suya es para $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, dependiendo de si la curva es plana o espacial. Los elementos $\mathbf{b}_i$ son las coordenadas de la curva en la base dada.

Ejemplo: La curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 - 1, 2t^2 + t + 2, t^3 + t\right)$$

es una curva polinómica, que podemos escribir como

$$\mathbf{x}(t) = (1,0,1)\, t^3 + (0,2,0)\, t^2 + (0,1,1)\, t + (-1,2,0)\, .$$

Por tanto, las coordenadas de la curva en la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ son

$$(-1,2,0)\, , (0,1,1)\, , (0,2,0)\, , (1,0,1)\, .$$

Si expresamos una curva polinómica en la base $\{1, t, \ldots, t^n\}$, las coordenadas $\mathbf{b}_i$ en esta base cambian si aplicamos transformaciones afines, en general. Este es un problema en el diseño de curvas, porque entonces la expresión de la curva representada en un modelo, es distinta de la expresión obtenida para la curva a otro tamaño, por ejemplo.

Por eso, vamos a intentar sustituir esta base por otra, que llamamos

$$\{B_0^n(t)\, , B_1^n(t)\, , \ldots, B_n^n(t)\}$$

de tal forma que sea invariante a las transformaciones afines. En esta base, podemos escribir una curva cualquiera como Para ello, vamos a pedir que se cumpla

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1.$$

Entonces, si la curva está expresada como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i^n B_i^n(t)\, ,$$

para cada t, tendríamos una combinación baricéntrica de puntos. Va a ser invariante respecto a transformaciones afines.

Una forma sencilla de encontrar estos polinomios $B_i^n(t)$, que llamamos **polinomios de Bernstein**, es desarrollando la igualdad

Llamamos
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$
Son $n+1$ polinomios, que además son linealmente independientes.

Proposición 1. *Los polinomios de Bernstein son una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menos o igual que n.*

Demostración. Sabemos que
$$B_0^n(t) = (1-t)^n = 1 - \binom{n}{1} t + \binom{n}{2} t^2 + \ldots + (-1)^n t^n,$$

$$\begin{aligned}
B_1^n(t) &= nt(1-t)^{n-1} = nt\left(B_0^{n-1}(t)\right) \\
&= nt\left(1 - \binom{n-1}{1} t + \binom{n-1}{2} t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1}\right), \\
B_2^n(t) &= \frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} t^2 \left(B_0^{n-2}(t)\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} t^2 \left(1 - \binom{n-2}{1} t + \binom{n-2}{2} t^2 + \ldots + (-1)^{n-2} t^{n-2}\right), \\
&\ldots \\
B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i B_0^{n-i}(t).
\end{aligned}$$

Por eso, escribiendo la matriz de los coeficientes respecto a la base canónica $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ es

$$\begin{pmatrix}
1 & -\binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & (-1)^n \\
0 & \binom{n}{1} & -\binom{n}{1}\binom{n-1}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\
0 & 0 & \binom{n}{2} & \cdots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

2.2. Curvas de Bézier

Observamos que si tenemos una curva polinómica, expresada a partir de los polinomios de Bernstein, nos basta con dar sus coordenadas $\{\mathbf{b}_i^n\}$, por lo que la curva está definida de forma única por estos puntos, que llamos **polígono de control**.

Muchas veces, técnicamente, las curvas de Bézier suele hacer referencia al sistema desarrollado por el algoritmo de De Casteljau para el diseño industrial de curvas. Nosotros vamos a llamar **curvas de Bézier** a las curvas dadas por la expresión

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i^n B_i^n(t), t \in [0,1]$$

si $B_i^n(t)$ son los polinomios de Bernstein y $\{\mathbf{b}_i^n\}$ es el políogono de control.

Ejemplo 11. La curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (1,1) B_0^3(t) + (0,2) B_1^3(t) + (2,-1) B_2^3(t) + (0,-3) B_3^3(t)$$

es una curva de Bézier, con polígono de control $\{(1,1), (0,2), (2,-1)\ (0,-3)\}$.

Si desarrollamos los polinomios de Bernstein, podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = (1,1) & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + (0,2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 \\
& + (2,-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 + (0,-3) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\
& = (1,1)(1-t)^3 + (0,2)\, 3t (1-t)^2 + (2,-1)\, 3t^2 (1-t) + (0,-3)\, t^3 \\
& = \begin{pmatrix} (-t+1)^3 + 6t^2(-t+1), \\ -3t^3 + (-t+1)^3 + 6t(-t+1)^2 - 3t^2(-t+1) \end{pmatrix}^t .
\end{aligned}$$

Ejemplo 12. Vamos a escribir la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2+t-2, t^3-8)$ con $t \in [0,1]$ como una curva de Bézier.

El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{b}_0 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) t^1 (1-t)^2 \\
&+ \mathbf{b}_2 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3 \\
&= \left(\begin{array}{c} x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3 + 3tx_1 - 6t^2 x_1 + 3t^3 x_1 + 3t^2 x_2 - 3t^3 x_2 + t^3 x_3, \\ y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3 + 3ty_{01} - 6t^2 y_1 + 3t^3 y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^3 y_2 + t^3 y_3 \end{array} \right)^t \\
&= \left(\begin{array}{c} x_0 + (-3x_0 + 3x_1) t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2) t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1) t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2) t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) t^3 \end{array} \right)^t \\
&= (t^2 + t - 2, t^3 - 8).
\end{aligned}
$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$
y_0 + (-3y_0 + 3y_1) t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2) t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) t^3 = t^3 - 8,
$$

lo que implica

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -8, \\
-3y_0 + 3y_1 = 0 &\Longrightarrow y_1 = y_0 = -8, \\
3y_0 - 6y_1 + 3y_2 = 0 &\Longrightarrow y_2 = -y_0 + 2y_1 = 8 + 2(-8) = -8, \\
-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 = 1 &\Longrightarrow y_3 = 1 + y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -7.
\end{aligned}
$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$
x_0 + (-3x_0 + 3x_1) t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2) t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) t^3 = t^2 + t - 2.
$$

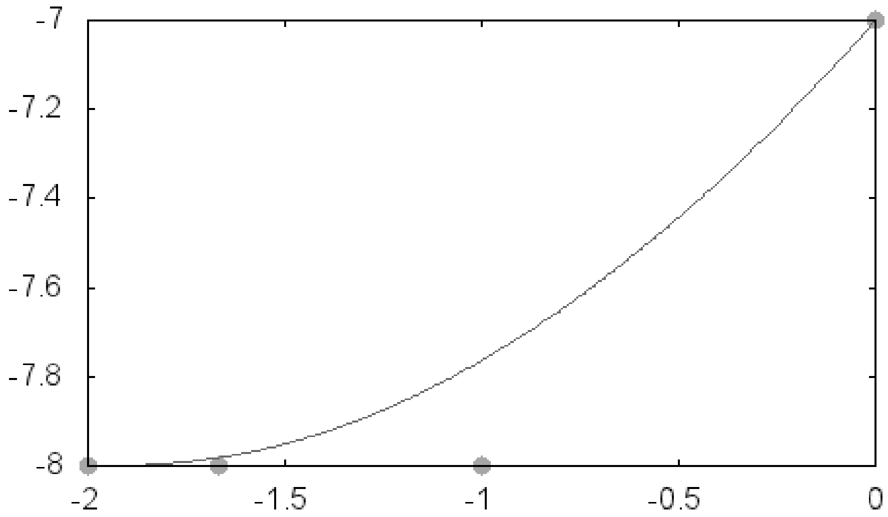
Se deduce:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -2, \\
-3x_0 + 3x_1 = 1 &\Longrightarrow 3x_1 = 1 - 6 = -5 \Longrightarrow x_1 = -\frac{5}{3}, \\
3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 1 &\Longrightarrow 3x_2 = 1 - 3x_0 + 6x_1
\end{aligned}
$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= (t^2+t-2, t^3-8) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= (-2,-8)\, B_0^3(t) + \left(-\frac{5}{3}, -8\right) B_1^3(t) + (-1,-8)\, B_2^3(t) + (0,-7)\, B_3^3(t)\,.\end{aligned}$$

La gráfica es:



$\blacksquare$

Observación 2. *Una curva de Bézier verifica* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n$.
La expresión de una curva de Bézier es

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)\,.$$

Sabemos que

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}\,.$$

Además:

$$B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)^n, \quad B_0^n(0) = 1, \quad B_0^n(1) = 0,$$
$$B_n^n(t) = \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t^n, \quad B_n^n(0) = 0, \quad B_n^n(1) = 1.$$

Por eso:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(0) = \mathbf{b}_0,$$
$$\mathbf{x}(1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(1) = \mathbf{b}_n.$$

Observación 3. *Las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones afines, es decir, si f es una transformación afín entonces:*

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{b}_i) B_i^n(t).$$

Si f es una transformación afín, entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Así:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)\right) &= \mathbf{A}\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t) + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}\mathbf{b}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} B_i^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{b}_i + \mathbf{b}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{b}_i) B_i^n(t). \end{aligned}$$

Observación 4. *Una curva de Bézier $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ permanece dentro de la envoltura convexa del polígono de control, si $t \in [0,1]$.*

El polígono de control es $\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. La envoltura convexa son los puntos de la forma

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \geq 0.$$

Observación 5. *Simetría de las curvas de Bézier: La imagen de una curva de Bézier con polígono de control* $\{\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *coincide con la de la curva que tiene el polígono de control invertido, es decir,* $\{\mathbf{b}_n, \ldots, \mathbf{b}_0\}$.

Tenemos que ver que cualquier punto de C_1*, curva de Bézier con polígono de control* $\{\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *esá en* C_2*, que es la curva que tiene el polígono de control* $\{\mathbf{b}_n, \ldots, \mathbf{b}_0\}$*. Llamamos, para esta segunda curva,* $\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_{n-j}$ *y así, el polígono de control es* $\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n\}$*. Supongamos que* $(t_0, \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t_0))$ *es un punto de* C_1*, con* $t_0 \in [0,1]$*. Entonces:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t_0) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) t_0^i (1-t_0)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) (1-t_1)^i (1-(1-t_1))^{n-i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) (1-t_1)^i t_1^{n-i} = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \left(\begin{array}{c} n \\ n-i \end{array}\right) (1-t_1)^i t_1^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{n-i}^n(1-t_1) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(t_1) = \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_j B_j^n(t_1),\end{aligned}$$

si $t_1 = 1 - t_0 \in [0,1]$*. Pero este punto está en* C_2 *para* $t = t_1$*. Por eso, es un punto de* C_2*.*

El recíproco se demuestra igual.

Observación 6. *Una curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos del mismo.*

La curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *es*

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Hay que demostrar que $\mathbf{b}'(0)$ *es paralelo a* $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ *y que* $\mathbf{b}'(1)$ *es paralelo a* $\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$.

Para el primer caso, tenemos

Para demostrar que $\mathbf{b}'(1)$ *es paralelo a* $\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$*, repetimos el proceso anterior, utilizando que* $B_n^n(1) = 1, B_i^n(1) = 1$ *para* $i \neq 0$*:*

$$\mathbf{b}'(1) = \sum_{i=0}^{n-1} n\Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t) = n\Delta \mathbf{b}_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(0) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}),$$

quedando así demostrada esta propiedad.

Ejemplo 13. Vamos a escribir la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2+t-2, t^3-8)$ con $t \in [0,1]$ como una curva de Bézier utoilizando estas propiedades, como hicimos en el ejemplo 12. Podemos calcular los puntos de control como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0 &= \mathbf{x}(0) = (-2,-8), \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{x}(1) = (0,-7), \\
\mathbf{x}'(0) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) &\Longrightarrow \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{x}'(0) + \mathbf{b}_0 = \left(\frac{1}{3} - 2, -8\right) \\
&\Longrightarrow \mathbf{b}_1 = \left(-\frac{5}{3}, -8\right), \\
\mathbf{x}'(1) = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) &\Longrightarrow \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{x}'(1) = (-1,-8).
\end{aligned}$$

El resultado es el mismo que en el ejemplo citado. ▬

Ejemplo 14. Vamos a calcular la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,5)$.

El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1,2),\ \mathbf{b}_1 = (0,1),\ \mathbf{b}_2 = (1,1),\ \mathbf{b}_3 = (1,-1),\ \mathbf{b}_4 = (2,5).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

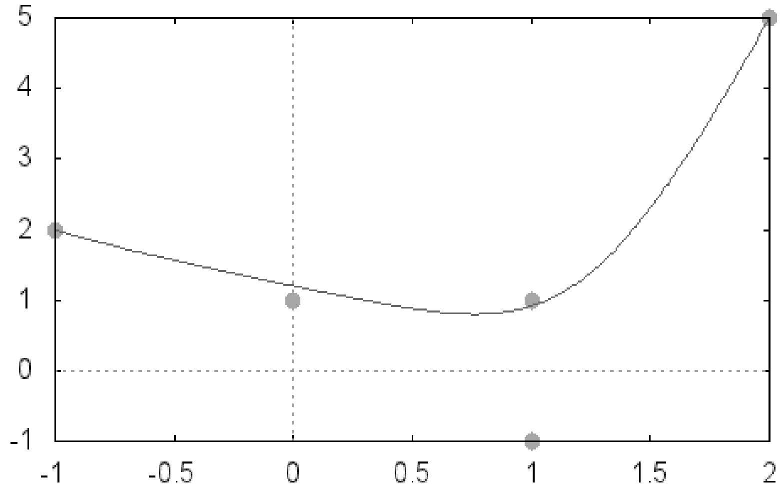
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

Entonces la curva de Bézier es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(t) &= (-1,2)B_0^4\,(t) + (0,1)B_1^4\,(t) + (1,1)B_2^4\,(t) + (1,-1)B_3^4\,(t) + (2,5)B_4^4\,(t)\\
&= (-1,2)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} t^0\,(1-t)^4 + (0,1)\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} t^1\,(1-t)^3 + (1,1)\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} t^2\,(1-t)^2\\
&+ (1,-1)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} t^3\,(1-t)^1 + (2,5)\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} t^4\,(1-t)^0\\
&= (-1,2)\,(1-t)^4 + (0,1)4t^1\,(1-t)^3 + (1,1)6t^2\,(1-t)^2\\
&+ (1,-1)4t^3\,(1-t)^1 + (2,5)t^4\\
&= \left(-1+4t-4t^3+3t^4, 2-4t+6t^2-12t^3+13t^4\right).
\end{aligned}
$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



3. Curva regular. Primeras definiciones y resultados.

y los puntos regulares son los puntos que no son singulares. La curva sin puntos singulares se llama curva regular.

Ejemplo 15. Vamos a ver que las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

definen una curva regular.

Para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable y que no tenga puntos singulares. Es una función diferenciable, porque las componente son derivables, al ser producto de funciones trignométricas con polinomios. Será regular si

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0).$$

Al resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 2t\cos t - t^2 \operatorname{sen} t = 0, \\ y'(t) = \cos t = 0, \end{array}\right\}$$

de la segunda ecuación se deduce que

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la primera, tenemos

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ = 0 - (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Por eso, es una curva regular. ■

Ejemplo 16. Vamos a estudiar si la curva $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, \cos t)$ tiene todos sus puntos regulares.

Como $\mathbf{x}'(t) \neq (0,0,0)$ para todo t :

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, 3t^2, -\operatorname{sen} t\right) \neq (0,0,0),$$

todos los puntos de la curva son regulares. ■

Según la definición anterior, en los puntos singulares no existe recta tangente.

Definimos el **vector tangente** a una curva como el vector derivada unitario, es decir, como el vector

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

Ejemplo 17. Encontremos el vector derivada y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t,$$

que vimos en el ejemplo anterior. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \cos t\right), \ \mathbf{x}'(0) = (0, 1).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$. Por tanto, la recta tangente en ecuaciones paramétricas es, para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(x, y) = (0, 0) + \lambda (0, 1).$$

El vector tangente es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{(2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \cos t)}{\|(2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \cos t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}} \left(2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \cos t\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Vamos a calcular el angulo que forman los vectores derivada a la curva $\mathbf{x}(t) = (at, bt^2, t^3)$ con el vector $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, si $2b^2 = 3a$.

Primero determinamos el vector derivada a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$, que es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(a, 2bt, 3t^2\right).$$

Ahora determinamos el coseno del ángulo θ que forman a partir del producto escalar. Sabemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t) &= (1, 0, 1) \cdot \left(a, 2bt, 3t^2\right) = a + 3t^2, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t) &= \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{x}'(t)\| \cos \theta = \sqrt{1+1}\sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4} \cos \theta.\end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones, tenemos:

Por eso, todos los vectores derivada forman un ángulo constante con la curva, que es $\theta = \frac{\pi}{4}$. $\blacksquare$

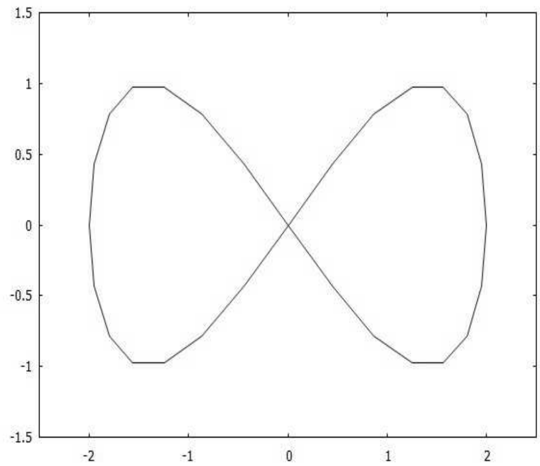
Ejemplo 19. La curva de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \ \text{sen}\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

para $t \in [0, 2\pi)$ se llama curva de Bernoulli. Con `Maxima` podemos representarla con la sentencia

```
>>  load(draw)$
    draw2d(parametric(2*cos(t-%pi/2),
    sin( 2*(t-%pi/2)),t  , 0, 2*%pi),
    nticks=400,xrange = [-3,3],yrange = [-3,3]);
```

Su gráfica es



Observamos que en $(0, 0)$ tiene dos posibles vectores derivada. Veamos para qué valores de t es $\mathbf{x}(t) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \ \text{sen}\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = (0, 0) \\
&\Longleftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \ \text{sen}\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow t = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Como debe ser $t \in [0, 2\pi)$, en este caso es

En este ejemplo, hemos visto que en $(0,0)$ la curva tiene dos vectores derivadas, implicando vectores tangentes con sentidos opuestos. ¿Contradice este resultado la definición de curva regular?

La respuesta a la pregunta planteada en el ejemplo es no. Observamos que los vectores derivada (y, por tanto, las rectas tangentes) a la curva en $t = 0$, $t = \pi$ no coinciden, aunque la curva pasa dos veces por el mismo punto. Decimos que $\mathbf{P}$ es un punto múltiple de una curva dada por la función $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si existen dos valores de t, que llamamos t_0, t_1 con

$$\mathbf{P} = \mathbf{x}\,(t_0) = \mathbf{x}\,(t_1)\,.$$

Ahora vamos a introducir una nueva "variable", que llamamos $s\,(t)$ y que es la longitud del arco de curva entre un punto $\mathbf{P}$ de la curva, que corresponde a $t = t_0$ y otro cualquiera $\mathbf{Q}$. Tiene un significado geométrico claro. Esta longitud es independiente de las ecuaciones con las que describimos la curva, y que en general no coincide con la distancia euclídea entre los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Pero además, si se dan unas nuevas ecuaciones teniendo en cuenta esta variable, se reparametriza la curva con la longitud de arco y la velocidad de la parametrización (es decir, $\|\mathbf{x}'\,(t)\|$) va a ser 1.

Comenzamos. Sea C una curva definida por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x} : [a,b] \subset I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un arco de una curva, que llamamos γ, es decir, es la parte de la curva dada por $\mathbf{x}\,(t)$ donde $t \in [a,b]$. La partición $\sigma = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_m = b\}$ determina una línea poligonal que aproxima C de longitud

$$L\,(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x}\,(t_i) - \mathbf{x}\,(t_{i-1})\|\,.$$

Llamamos al conjunto de las particiones de γ como $P[a,b]$. De forma clara, si hacemos que el diámetro de la partición sea muy pequeño, la longitud de la línea poligonal va a coincidir prácticamente con la longitud del arco de curva.

Vamos a aceptar como válido que si la función $\mathbf{x}$ es diferenciable y la diferencial es continua, entonces el conjunto

Teorema 8. *Dado un arco de una curva diferenciable, se tiene*

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b \left\| \mathbf{x}'(t) \right\| dt.$$

No vamos a demostrar este resultado, pero si desea, puede consultar su demostración en el documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Ejemplo 20. Vamos a calcular la longitud de una semicircunferencia de radio r y centrada en $(0, 0)$, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$$

para $t \in [0, \pi]$. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),$$

lo que implica que

$$\left\| \mathbf{x}'(t) \right\| = \sqrt{(-r\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (r\cos t)^2} = r.$$

Entonces

$$L = \int_0^\pi \left\| \mathbf{x}'(t) \right\| dt = \int_0^\pi r dt = rt|_0^\pi = r\pi.$$

Este resultado coincide con el conocido sobre que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$.

La longitud del arco de una curva es la función $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para $t_0 \in I$, por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \mathbf{x}'(u) \right\| du.$$

Esta expresión nos dice la longitud del arco de curva comprendido entre los puntos correspondientes a un instante inicial t_0 y un instante t, teniendo en cuenta que es negativa si $t < t_0$ y positiva si $t > t_0$. Intuitivamente, por su significado geométrico, entendemos que es una función creciente. Se puede

Trabajar con curvas parametrizadas por la longitud de arco simplifica mucho el cálculo de elementos de la curva, como veremos en el capítulo siguiente, al estar libres de cambios con origen en un cambio de velocidad. Además, todas las curvas regulares se pueden reparametrizar por la longitud de arco. Si tenemos dos curvas $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son reparametrizaciones una de la otra si existe una función $f : I \to J$ que es continua y derivable y tiene inversa continua y derivable, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ f.$$

Además, se cumple

$$\mathbf{y}'(t) = (\mathbf{x} \circ f)'(t) = \mathbf{x}'(f(t))\, f'(t).$$

Así, si una curva es regular, su parametrización también lo es y además, a partir de esta ecuación, observamos que la nueva curva se recorre a una velocidad que es la de la primera, pero escalada por $f'(t)$.

Ejemplo 21. Sea C la curva dada por $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{tg} t, \cos t)$ para $t \in (0, \pi)$. Vamos a encontrar las nuevas ecuaciones si se efectúa el cambio de parámetro $s = \operatorname{tg} t$.

Como $s = \operatorname{tg} t$, entonces $t = \operatorname{arctg} s$ y su derivada es $t' = \frac{1}{1+s^2} \neq 0$ para todo s. Por eso, es un cambio admisible de parámetro. En $(0, \pi)$ resulta

$$\cos t = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Por eso, haciendo el cambio de parámetro, resulta

$$\mathbf{y}(s) = \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} s), \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} s)}} \right) = \left(s, \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \right).$$

$\blacksquare$

Si tenemos una parametrización $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de una curva C y como la longitud de arco $s(t)$ es una función creciente, continua y derivable, y con inversa continua y derivable, a partir de su inversa, definimos una nueva parametrización $\mathbf{y} : J = s^{-1}(I) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con

En este caso, aplicando la regla de la cadena, la expresión de la derivada de la función inversa y la definición de longitud de arco y de su derivada, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \left(\mathbf{x} \circ s^{-1}\right)'(t) = \mathbf{x}'\left(s^{-1}(t)\right)\left(s^{-1}\right)'(t) \\ &= \mathbf{x}'\left(s^{-1}(t)\right) \frac{1}{s'\left(s^{-1}\right)(t)} \\ &= \frac{\mathbf{x}'\left(s^{-1}(t)\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(s^{-1}(t)\right)\right\|}. \end{aligned}$$

Por eso,

$$\left\|\mathbf{y}'(t)\right\| = 1$$

y ahora la curva está parametrizada por la longitud de arco.

Ejemplo 22. Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a \text{ sen } t, bt).$$

Vamos a parametrizarla por la longitud de arco.

La longitud de arco es

$$s(t) = \int_0^t \left\|\mathbf{x}'(t)\right\| dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,t,$$

porque

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-a \text{ sen } t, a\cos t, b), \\ \left\|\mathbf{x}'(t)\right\| &= \sqrt{(-a \text{ sen } t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y la curva queda

$$\mathbf{x}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \text{ sen } \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

No es sencillo parametrizar una curva por la longitud de arco y en muchos casos es prácticamente imposible. pero sabemos que esta parametrización existe siempre y esto nos va a ayudar mucho a simplificar cálculos. En general, para simplificar notación, cuando el parámetro de una curva sea s,

Apuntes de Complementos Matemáticos
de la Ingeniería Industrial

Ejercicios del tema 2. Inicio al estudio de curvas.

Versión 1.0

Índice general

1. Ejemplos de curvas. 4
2. Curvas de Bézier 7
3. Curva regular 7

1. Ejemplos de curvas.

1. **Ejercicio 18 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Escríbase una curva parametrizada que recorra una recta pero a velocidad no constante. Dibújese, usando `Maxima`.

   Solución. Puede ser, por ejemplo

   $$x = 1 + \cos t,$$
   $$y = -1 + 3\cos t$$

   Se representa con `wxplot2d([['parametric, 1+cos(t), -1+3*cos(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$`

2. **Ejercicio 19 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que los puntos de una curva están contenidos en una recta, es decir, satisfacen una ecuación lineal del tipo $ax + by + c = 0$, si y sólo si su velocidad $\mathbf{v}(t)$ es de la forma $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{v}_0$ para alguna función diferenciable $f(t)$ y un vector constante $\mathbf{v}_0$.

3. **Ejercicio 38 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese con un ejemplo que las afinidades no preservan ni distancias, ni ángulos, ni áreas.

   Solución. Tomamos la afinidad

   $$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   y los puntos $\mathbf{x} = (1,1)\,, \mathbf{y} = (1,0)$ y $\mathbf{z} = (0,2)$. En ese caso, llamamos $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathbf{xy}} = (0,-1)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{xz}} = (-1,1)$. Los tres puntos forman un triángulo de área $\frac{1}{2}$.

   Entonces:

   $$f(1,1) = (1,-1)\,,\; f(1,0) = (0,1)\,,\; f(0,2) = (1,-3)\,.$$

   Se cumple

El área del triángulo es, si $\mathbf{n} = (-2, 0)$ es un vector perpendicular a $\overrightarrow{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{z})}$ y de su mismo módulo

$$S\left(f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{y})\, f(\mathbf{z})\right) = \frac{1}{2}\left|\, \overrightarrow{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{n}\right| = 1 \neq \frac{1}{2} = S(\mathbf{xyz}).$$

4. **Ejercicio 36 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que las afinidades preservan la razón simple, es decir, si f es una afinidad y $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}$ son puntos alineados, entonces

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})).$$

Nota: Si $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ y $\mathbf{y}$ son puntos alineados y $\mathbf{p}$ está en el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, entonces existen λ, μ, con $\lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$, de tal forma que

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}.$$

Se puede escribir

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \mu\overrightarrow{\mathbf{xy}},$$

o

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{xy}} = \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{xp}} + \overrightarrow{\mathbf{py}}\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{xp}} - \mu\overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{py}} \\ \Longleftrightarrow \quad \lambda\overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{py}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{xp}} = \frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{py}}, \end{aligned}$$

suponiendo que $\mathbf{p}$ sea distinto de $\mathbf{y}$, o que $\lambda \neq 0$. Este número $\frac{\mu}{\lambda}$ se llama razón simple de los puntos y se denota como $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$.

Solución.

Vamos a demostrar que la afinidad conserva la razón simple, es decir que si r es la razón simple $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$, entonces también es $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y}))$. Como podemos escribir

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \text{ para } \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0,$$

entonces $r = \frac{\mu}{\lambda}$. Además,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}.$$

5. **Adaptado del Ejercicio 41 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Prográmese en `Maxima` una animación que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dada una razón simple r dibuje el punto correspondiente $\mathbf{p}$ y los segmentos $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$y $[\mathbf{p}, \mathbf{y}]$. Prográmese una animación que dibuje el punto $\mathbf{p}$ según va variando la razón simple.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

6. **Ejercicio 42.** Prográmese en `Maxima` una función que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dado un escalar λ dibuje el punto correspondiente $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \lambda + \mu = 1$.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

7. **Adaptado del Ejercicio 46 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Impleméntese, usando `Maxima`, el algoritmo de Jarvis.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

8. Considermos curvas polinómicas dadas por los punto $\mathbf{v}_i$, para $i = 0, \ldots n$ y cualquier transformación afín $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde A es una matriz $(n+1) \times (n+1)$ y $\mathbf{b}$ es un vector de dimensión $n+1$. Encuéntrense las curvas para las que la curva transformada mediante una afinidad coincida con la curva asociada al polígono transformado.

En general, se cumple que

$$f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{v}_i)\, t^i \iff \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} t^i$$
$$\iff \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} t^i,$$

para todo t. Esto sólo es cierto cuando $n = 0$, es decir, cuando la curva es un punto.

Realice los ejercicios 11 a 17 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

2. Curvas de Bézier

Realice el ejercicio 43 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Realice los ejercicios 47 a 66 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

3. Curva regular

1. Estudie si la curva $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, \cos t)$ tiene todos sus puntos regulares.

   Solución. Sí, porque $\mathbf{x}'(t) \neq (0,0,0)$ para todo t :

   $$\mathbf{x}'(t) = \left(1, 3t^2, -\operatorname{sen} t\right) \neq (0,0,0).$$

2. Sea la curva $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, t^2)$. Estudie si la siguientes opciones son correctas.

   a. Todos sus puntos son regulares.

   b. El vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ puede ser perpendicular al plano xy.

   Solución. La opción **a**. es correcta, porque $\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2, t) \neq (0,0,0)$.

   La opción **b** no es correcta, porque esta condición significa que

   $$\frac{\mathbf{x}'(t)}{\mathbf{x}'(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4+t^2}} \left(1, 3t^2, t\right)$$

   vale $(0,0,k)$ y esto no ocurre para ningún valor de t.

3. Determine los puntos múltiples de la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

   $$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t \operatorname{sen} t$$

   Solución: Estudiamos cuándo es $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ inyectiva para *a*) Si $x(t) = t\cos t = 0$, pero $t \neq 0$. Esto ocurre cuando $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Observamos que

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) &= \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), \\ y\left(-\frac{\pi}{2}-k\pi\right) &= \left(-\frac{\pi}{2}-k\pi\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}-k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k+1}(-1)\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = y\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right). \end{aligned}$$

Por eso, estos puntos son múiltiples.

b) Si $x(t) = t\cos t \neq 0$ pero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t')$ entonces debe ser:

$$\begin{aligned} t\cos t &= t'\cos t', \\ t \operatorname{sen} t &= t' \operatorname{sen} t'. \end{aligned}$$

Como $t \neq 0$, entonces

$$\operatorname{sen} t = \frac{t'}{t}\operatorname{sen} t', \quad \cos t = \frac{t'}{t}\cos t'$$

$$\Longrightarrow 1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \operatorname{sen}^2 t' + \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \cos^2 t' = \left(\frac{t'}{t}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = 1 \Longrightarrow t' = \pm t.$$

Si $t' = -t$, entonces

$$x(t') = t'\cos t' = -t\cos(-t) = -t\cos t \neq x(t).$$

Podemos afirmar que no hay más punto múltiples.

4. Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (2t, 3t^3, 3t^2)$ con el vector $(1, 1, 0)$.

Solución. El vector tangente a la curva tiene la misma dirección y sentido que

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2, 9t^2, 6t\right).$$

Podemos calcular el ángulo que forman dos vectores a partir del producto escalar

Entonces
$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

5. Sea C la la curva dada por
$$x = \lambda^3 - \lambda, y = \lambda^4 - 1, z = \operatorname{sen}^2 \pi\lambda.$$
para $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se pide estudiar si $(0,0,0)$ es un punto múltiple.

Solución. Para que sea punto múltiple debe ser
$$x = 0, y = 0, z = 0$$
para dos valores distintos de λ. Buscamos si existen estos valores en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:
$$\begin{array}{lllll} x = \lambda^3 - \lambda = 0 & \Longleftrightarrow & \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 & \Longleftrightarrow & \lambda = \pm 1, \lambda = 0, \\ y = \lambda^4 - 1 = 0 & \Longleftrightarrow & \lambda^2 = 1 & \Longleftrightarrow & \lambda = \pm 1, \\ z = \operatorname{sen}^2 \pi\lambda = 0 & \Longleftrightarrow & \operatorname{sen}^2 \pi\lambda = 0 & \Longleftrightarrow & \lambda = \pm 1. \end{array}$$
Como $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$, que están en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y los dos hacen que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, entonces este punto es múltiple de multiplicidad 2.

6. Sea C la curva dada por la representación paramétrica $(I, \mathbf{x})$, para $I = (-10, 10)$ y
$$\mathbf{x}(t) = (4\cos t, 4 \operatorname{sen} t, -t).$$
Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

Solución. Una representación paramétrica $\mathbf{x}(t)$ es natural si su parámetro es la longitud de arco, es decir, si $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|$ o si la longitud de arco entre 0 y s es:
$$s = \int_0^s \|\mathbf{x}'(s)\| \, ds.$$
En esta curva tenemos:
$$\mathbf{x}'(t) = (-4 \operatorname{sen} t, 4\cos t, -1),$$

Si hacemos el cambio de parámetro $t = \frac{s}{\sqrt{17}}$, la curva queda con la representación natural:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t) = \left(4\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, 4\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{s}{\sqrt{17}}\right).$$

7. Consideramos la curva dada por la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio 1 que rueda sobre otra circunferencia de radio 1 (cardioide). Calcule la longitud de un arco de cardioide entre 0 t t_0 sabiendo que está dado por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\,\mathrm{sen}\,t - \,\mathrm{sen}\,2t)$$

para $t \in (0, 2\pi)$. ¿Cuál es la longitud del cardioide?

Solución: Como $\mathbf{x}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t + 2\,\mathrm{sen}\,2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$, tenemos que la longitud entre 0 y t_0 será:

$$\begin{aligned}
I(t_0) &= \int_0^{t_0} \sqrt{(-2\,\mathrm{sen}\,t + 2\,\mathrm{sen}\,2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt \\
&= \int_0^{t_0} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t - 8\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,2t + 4\,\mathrm{sen}^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t\cos 2t + 4\cos^2 2t} dt \\
&= \int_0^{t_0} 2\sqrt{2 - 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,2t - 2\cos t\cos 2t} dt = 2\int_0^{t_0} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\
&= 2\int_0^{t_0} 2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} dt = 8 - 8\cos\frac{1}{2}t_0.
\end{aligned}$$

La longitud del cardioide es:

$$I(2\pi) = 8 - 8\cos\pi = 16.$$

Realice los ejercicios 76, 78, 79, 80, 81, 85, 86, 91, 92, 99, 100 y 101 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 3. Curvas regulares en el plano. Estudio local y resultados globales.

Versión 1.1

19 de noviembre de 2016

Índice general

3. Curvas planas 4
3.1. Curvatura 4
3.2. Curvatura de una curva definida implícitamente 21
3.3. Envolvente de una familia de curvas planas parametrizadas 23
3.4. ¿Tenemos una curva plana si conocemos su curvatura? 29
3.5. Ecuaciones de Frenet para curvas planas 30
3.6. Teorema fundamental de la teoría local de curvas, para curvas planas 30

3. Curvas planas

3.1. Curvatura

En este tema nos vamos a centrar en curvas en el plano. Aunque tienen características comunes con las curvas en el espacio, vamos a estudiarlas en primer lugar para iniciarnos en el estudio de curvas. tienen la ventaja de que se representan gráficamente de forma sencilla y por tanto, su estudio es bastante intuitivo.

Partimos de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, pero vamos a suponer primero que está parametrizada por el arco. Esto significa que está dada por una expresión del tipo

$$\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s)),$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Del vector tangente, que llamaremos $\mathbf{t}(s)$, sabemos que

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Como está parametrizada por la longitud de arco, $\mathbf{t}(s)$ es un vector unitario. La velocidad con la que varía este vector nos indica cuánto se está curvando la curva. Así, definimos el **vector curvatura** como

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s)$$

y la función curvatura o **curvatura** es su módulo, es decir, es

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|.$$

Esta definición es válida tanto para curvas en el plano como en el espacio.

Ejemplo 1. La curvatura de una recta es 0.

En efecto, sabemos que una recta parametrizada por el arco está dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto por el que pasa la recta y $\mathbf{v}$ es un vector unitario que es el vector director de la recta. Además, sabemos que

Ejemplo 2. Sabemos que la hélice dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$

no está parametrizada por el arco, pero sí lo está si las ecuaciones son

$$\mathbf{x}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Su vector normal es

$$\mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Entonces, su vector curvatura es

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right).$$

Obsérvese que su componente z es nula. La curvatura es

$$k(s) = \sqrt{\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$
$$= \frac{a}{a^2+b^2}.$$

De nuevo, obtenemos una curva de curvatura constante. ∎

Un **punto de inflexión** (o punto singular de orden 1) es un punto donde la curvatura es 0. Sabemos que en una recta todos los puntos son de inflexión. Pero además, la recta es la única curva donde todos sus puntos son puntos de inflexion.

Curvatura de curvas planas parametrizadas por la longitud de arco

Cuando tenemos una curva parametrizada por el arco, se cumple que $\|\mathbf{x}'(s)\|^2 = 1$. Lo podemos escribir como

$$d\mathbf{x} \quad d\mathbf{x}$$

Esto significa que el vector derivada segunda es ortogonal al vector tangente, o que la aceleración de una curva parametrizada por el arco es perpendicular a la velocidad.

Por otro lado, si la curva es plana, existe un único vector unitario $\mathbf{n}(s)$ de tal forma que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$. Llamamos **vector normal** a $\mathbf{n}(s)$. Como conocemos que $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ y sabemos que es unitario, el vector normal va a ser

$$\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Por otro lado, tenemos que $\mathbf{k}(s)$ también es un vector perpendicular al vector tangente. Y sabemos que el producto escalar

$$\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)$$

es la proyección del vector curvatura sobre el vector normal. Entonces al ser $\mathbf{n}(s)$ unitario, tenemos:

$$|\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)| = \|\mathbf{x}''(s)\| = k(s).$$

Obsérvese que podemos escribir el vector curvatura como

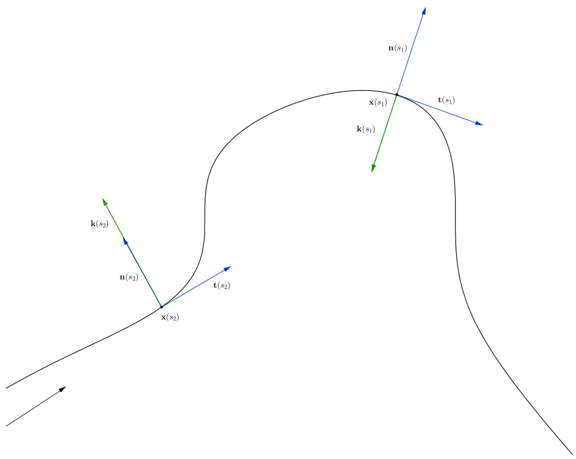
$$\mathbf{k}(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s).$$

Esta es la primera de las fórmulas de Frenet.

Cuando la curva es plana, la función curvatura es:

$$\begin{aligned} k(s) &= \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s) = (-y'(s), x'(s)) \cdot (x''(s), y''(s)) \\ &= -y'(s)\,x''(s) + x'(s)\,y''(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix} \qquad (1) \\ &= \det(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)). \end{aligned}$$

Pero además, sabemos que el producto escalar $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)$ es positivo si los dos vectores tienen la misma dirección. Volviendo a la idea geométrica, el vector tangente es la velocidad con la que se recorre una curva y el vector normal es perpendicular a él, pero formando una base positiva. Es decir, se



En este sentido, para curvas planas la curvatura nos dice para dónde gira la curva. Esto no ocurre en las curvas en el espacio.

Observe que la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva. Si f es dos veces derivable con continuidad, si su derivada segunda es positiva decimos que la función es convexa y si es negativa decimos que es cóncava. La concavidad y la convexidad nos dan una idea intuitiva de hacia dónde se curva la gráfica de la función, y para funciones suficientemente regulares, está relacionada con el signo de la derivada segunda. Esto nos recuerda a la curvatura de una cueva plana: para valores del parámetro t creciendo, la derivada primera f' crece, la derivada segunda es positiva, la función es convexa e interpretanto la gráfica de f como una curva, su curvatura es positiva.

Ejemplo 3. La cicloide está dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}\left(t\right) = \left(rt - r\,\mathrm{sen}\,t, r - r\cos t\right),$$

con $t \in (0, 2\pi)$. Si queremos determinar, con lo que sabemos hasta ahora, su curvatura, debemos parametrizarla por la longitud de arco. Para $r = 1$ estas ecuaciones son:

$$\mathbf{x}\left(s\right) = \left(2\arccos\left(1 - \frac{1}{4}s\right) - \mathrm{sen}\left(2\arccos\left(1 - \frac{1}{4}s\right)\right)\right.$$

Este ejemplo muestra que aún teniendo la curva parametrizada por la longitud de arco, no siempre es sencillo calcular la curvatura. Además, no siempre es posible encontrar una expresión clara y paramétrica de una curva parametrizada por el arco, porque esto implicar resolver una integral, lo que puede no ser sencillo o no ser posible. Por eso, vamos a buscar una expresión de la curvatura para la curva dada en ecuaciones paramétricas cualesquiera.

Curvatura de curvas planas no parametrizadas por la longitud de arco

Ahora vamos a ver cómo podemos calcular la curvatura de una curva plana, sin que esté parametrizada por la longitud de arco. Vamos a llamar $k(t)$ a la curvatura, abusando de la notación, ya que en realidad estamos determinando $k(s(t))$. Su expresión se puede determinar sin necesidad de conocer las ecuaciones del cambio de parámetro, utilizando la regla de la cadena y el teorema de la función implícita.

Sabemos que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\|,$$

porque los vectores $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ tienen la misma dirección y sentido, y $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ es unitario, por la definición del parámetro longitud de arco. Entonces, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|}.$$

Si derivamos implícitamente esta ecuación respecto a s, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(s(t)) = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) \qquad (2)\\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.\end{aligned}$$

Queremos tener una espresión del vector $\mathbf{k}(s(t))$ sin tener que utilizar las

No conocemos $\frac{d^2t}{ds^2}$. Pero para determinar $k(t) = k(s(t))$ no lo necesitamos, porque según la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right) + \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{dt}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.
\end{aligned}$$

De esta expresión ya conocemos todos los factores que aparecen y podemos determinar la curvatura de la curva que no está parametrizada por la longitud de arco.

El vector curvatura es normal al vector tangente. Como el vector tangente cumple:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(x'(t), y'(t)\right),$$

entonces sabemos que el vector curvatura va a ser paralelo al vector

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Pero además sabemos que el vector curvatura va a ser

$$\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) = k(t)\frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Obsérvese que $\mathbf{n}(t)$ está definido de tal forma que $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ es una base

Vamos a dibujarla y también a dibujar su función de curvatura. Vamos a interpretar geométricamente el signo de la curvatura, sus máximos, mínimos y ceros.

Dibujamos la función con Maxima. Primero la definimos y calculamos la función curvatura, utilizando

```
(%1)  x1(t):=(cos(t));
      x2(t):=sin(2*t);
      x(t):=[x1(t),x2(t)];
      define(tangente(t),diff(x(t),t,1));
      define(dsegunda(t),diff(x(t),t,2));
      A:matrix(tangente(t),dsegunda(t));
      det:expand(determinant(A));
      norma3:(tangente(t).tangente(t))^(3/2);
      curvat:det/norma3;
      define(curvatura(t),curvat);
```

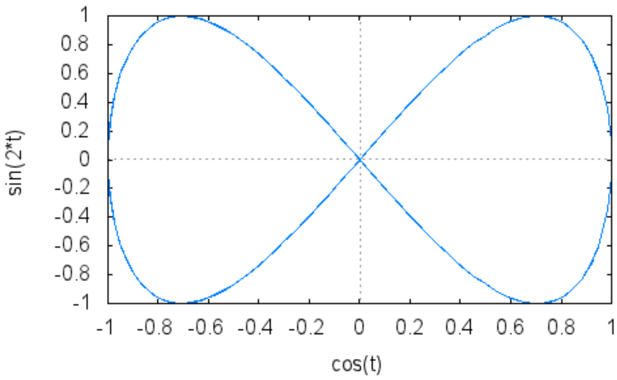
Con Maxima, obtenemos que

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{4 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + 2\cos t \cos 2t}{\left(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}} \\ &= \frac{-4\cos^3 t + 6\cos t}{\left(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

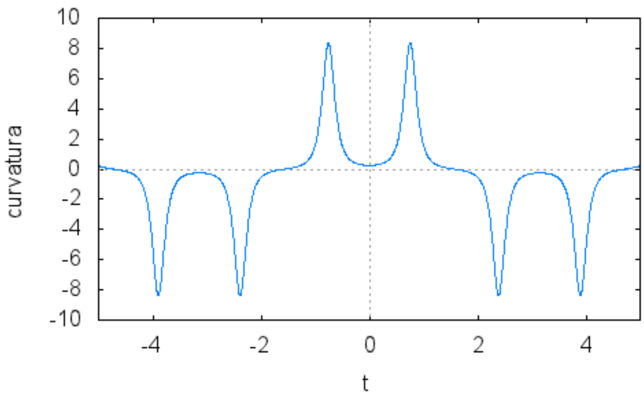
porque

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + 2\cos t \cos 2t &= 8 \operatorname{sen}^2 t \cos t + 2\cos t \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right) \\ &= 6 \operatorname{sen}^2 t \cos t + 2 \operatorname{sen}^2 t \cos t + 2\cos^2 t \cos t - 2\cos t \operatorname{sen}^2 t \\ &= 6 \operatorname{sen}^2 t \cos t + 2\cos t - 2\cos t \operatorname{sen}^2 t \\ &= 4 \operatorname{sen}^2 t \cos t + 2\cos t = 4\left(1 - \cos^2 t\right)\cos t + 2\cos t \\ &= -4\cos^3 t + 6\cos t. \end{aligned}$$

Ahora podemos dibujar la curva, utilizando `wxplot2d(['parametric, x1(t),x2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]])$`. El resultado es la curva



Dibujamos la función curvatura con `wxplot2d([curvatura], [t,-5,5])$`. La gráfica de la función curvatura es la siguiente:



Vemos que la función curvatura es periódica y que vale 0 si

$$0 = 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,2t + 2\cos t\cos 2t = 8\,\mathrm{sen}^2 t\cos t + 2\cos t\left(\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t\right)$$

Tenemos que resolver

$$-4\cos^3 t + 6\cos t = \cos t\left(-4\cos^2 t + 6\right) = 0.$$

Una solución es $\cos t = 0$, que es lo mismo que $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. No tiene más soluciones, porque

$$-4\cos^2 t + 6 > 0$$

para todo t. Estos puntos corresponden a

$$\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = (0, 0).$$

Como la curvatura en $(0, 0)$ es 0, esto significa que si la curva está parametrizada por la longitud de arco, la velocidad y la aceleración son paralelas, o lo que es lo mismo, que el movimiento es rectilíneo o que podemos aproximarla localmente por una recta.

Por otro lado, la curvatura alcanza extremos relativos cuando su derivada es 0. Pero como es una curva regular periódica (es decir, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + 2\pi)$), podemos trabajar en un intervalo cerrado, como $[0, 2\pi]$ y se alcanzan también los extremos absolutos (en los extremos relativos o en los extremos del intervalo).

Utilizando `Maxima`, obtenemos la derivada de la curvatura, que es

$$k'(t) = -6(\operatorname{sen} t)\frac{32\cos^6 t - 80\cos^4 t + 24\cos^2 t + 5}{\left(16\cos^4 t - 17\cos^2 t + 5\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Las soluciones son $\operatorname{sen} t = 0$, o $t_1^k = k\pi$ o las soluciones de $32\cos^6 t - 80\cos^4 t + 24\cos^2 t + 5 = 0$. Para resolver esta ecuación, buscamos las raíces de

$$32x^3 - 80x^2 + 24x + 5 = 0,$$

donde $x = \cos^2 t$. Según `Maxima`, las raíces son

$$x = -0{,}13967237978324,\ x = 0{,}53035645929987,\ x = 2{,}109315920483367.$$

Sólo es válido el segundo valor, porque debe ser $x = \cos^2 t$. De nuevo utilizando `Maxima`, tenemos que

$$t_2^k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

Entonces, hay cinco candidatos a extremos condicionados. Calculamos el valor de $k(t)$ en estos puntos:

$$
\begin{aligned}
k\left(t_1^k\right) &= \frac{4 \operatorname{sen} k\pi \operatorname{sen} 2k\pi + 2\cos k\pi \cos 2k\pi}{\left(4\cos^2 2k\pi + \operatorname{sen}^2 k\pi\right)^{3/2}} = \frac{2\left(-1\right)^k}{4^{3/2}} = \frac{1}{4}, \\
k\left(t_2^k\right) = k\left(t_3^k\right) &= \frac{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}}{\left(4\cos^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}\right)^{3/2}} = 8, \\
k\left(t_4^k\right) = k\left(t_5^k\right) &= \frac{4 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + 2\cos \frac{3\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{2}}{\left(4\cos^2 \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{4}\right)^{3/2}} = -8.
\end{aligned}
$$

Los máximos absolutos se alcanzan en t_2^k y t_3^k y los mínimos absolutos en t_4^k y t_5^k. En t_1^k tenemos un extremo relativo. Nótese que los extremos del intervalo están incluidos en t_2^k.

Además,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(k\pi\right) &= \left(\cos k\pi, \operatorname{sen} 2k\pi\right) = \left(\left(-1\right)^k, 0\right), \\
\mathbf{x}\left(t_2^k\right) &= \left(\cos t_2^k, \operatorname{sen} 2t_2^k\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \\
\mathbf{x}\left(t_3^k\right) &= \left(\cos t_3^k, \operatorname{sen} 2t_3^k\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right), \\
\mathbf{x}\left(t_4^k\right) &= \left(\cos t_4^k, \operatorname{sen} 2t_4^k\right) \approx \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right), \\
\mathbf{x}\left(t_5^k\right) &= \left(\cos t_5^k, \operatorname{sen} 2t_5^k\right) \approx \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).
\end{aligned}
$$

Observamos que el valor absoluto del mínimo de la curvatura es igual al máximo de la curvatura. Recordamos que el signo indica hacia dónde se curva la curva. Además, observamos que la ordenada de los puntos donde se alcanzan los máximos y los mínimos es siempre ± 1.

Recorramos la curva desde $t = 0$. Comenzamos con $t = 0$, estamos en el punto $(1, 0)$. Si aumenta t, nos movemos en el sentido contrario a las

0. Justo después de este instante, el vector tangente y el vector curvatura forman ya una base negativa y, por eso, $k(t)$ es negativo. En $t = \frac{3\pi}{4}$, en el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ en valor absoluto la curvatura es la misma que en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, pero tienen distinto signo por la orientación de esta base. Avanzamos hasta $(-1, 0) = \mathbf{x}(\pi)$, donde la curvatura es negativa, antes estaba creciendo y después comienza a decrecer, para alcanzar otro mínimo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \mathbf{x}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. A partir de aquí, la curva pasa otra vez por $(0, 0)$ en $t = \frac{3\pi}{2}$, donde la curvatura es 0 y pasa de ser negativa a positiva, ya que el vector tangente y el vector curvatura tienen de nuevo orientación positiva. Si aumenta t, llegamos a otro punto donde la curvatura es máxima: es el punto $\mathbf{x}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$. En $t = 2\pi$ estamos en $(1, 0)$ y comenzamos de nuevo a recorrer la curva.

En el documento tema3.wxm se representa esta curva y se calculan distintos elementos suyos. ■

Ejemplo 5. Vamos a determinar el vector curvatura en cada punto de la lemniscata de Bernoulli, dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t).$$

Sabemos que el vector curvatura va a ser

$$\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) = k(t)\,\frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

En este caso, sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, 2\cos 2t),\\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t},\\
\mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -2\operatorname{sen} 2t),\\
\mathbf{n}(t) &= \frac{1}{\sqrt{4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t}}\left(-2\cos 2t, -\operatorname{sen} t\right),\\
k(t) &= \frac{-4\cos^3 t + 6\cos t}{\left(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

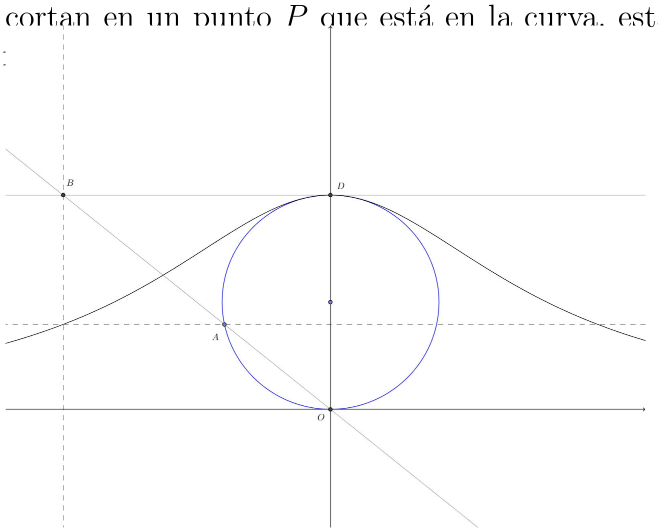
Entonces el vector curvatura va a ser

En el documento tema3.wxm hay una animación de la variación del vector curvatura.

Ejemplo 6. La Bruja de Agnesi es una curva dada por las ecuaciones paramétricas, para $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\mathbf{x}(t) = \left(2at, \frac{2a}{t^2+1}\right).$$

La Bruja de Agnesi se obtiene como un lugar geométrico. Tenemos una circunferencia de radio a, tangente en el origen de coordenadas al eje OX. Si llamamos D al puntos diametralmente opuesto al origen O. Trazamos la tangente a la circunferencia por D; es paralela al eje OX y a esta recta la llamamos r. Ahora trazamos una recta por O y por un punto A de la circunferencia que es distinto de D. Esta recta corta a la recta r en un punto B. Entonces la recta paralela al eje OX por A y la recta perpendicular al eje OX por B se cortan en un punto P que está en la curva, esta situación se muestra en la



Vamos a determinar su curvatura, el vector curvatura y si tiene puntos de inflexión.

Tenemos

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2a, \frac{-4at}{(t^2+1)^2}\right),$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ \dfrac{-4at}{(t^2+1)^2} & 4a\dfrac{3t^2-1}{(t^2+1)^3} \end{vmatrix} \frac{1}{\left(\frac{2}{(t^2+1)^2}\sqrt{a^2(t^2+1)^4+4a^2t^2}\right)^3} \\
&= 8a^2\frac{3t^2-1}{(t^2+1)^3}\frac{(t^2+1)^6}{8\sqrt{a^2(t^2+1)^4+4a^2t^2}^3} \\
&= \frac{1}{a}\left(3t^2-1\right)\frac{(t^2+1)^3}{(t^8+4t^6+6t^4+8t^2+1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Si hubiéramos parametrizado por la longitud de arco, los cálculos hubieran sido mucho más complicados.

Determinamos el vector curvatura a partir de

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \left(2a, \frac{-4at}{(t^2+1)^2}\right), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(2a)^2+\left(\frac{-4at}{(t^2+1)^2}\right)^2} = 2a\sqrt{1+4\frac{t^2}{(t^2+1)^4}} \\
&= 2a\sqrt{\frac{t^8+4t^6+6t^4+8t^2+1}{(t^2+1)^4}} = \frac{2a}{(t^2+1)^2}\sqrt{t^8+4t^6+6t^4+8t^2+1}.
\end{aligned}$$

Entonces

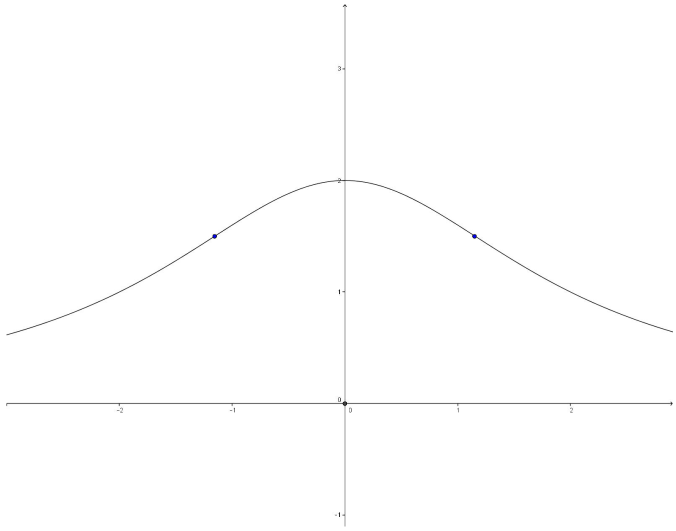
$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &= \frac{(t^2+1)^2}{2a\sqrt{t^8+4t^6+6t^4+8t^2+1}}\left(\frac{4at}{(t^2+1)^2}, 2a\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t^8+4t^6+6t^4+8t^2+1}}\left(2t, \left(t^2+1\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Ya tenemos el vector curvatura

Para calcular los puntos de inflexión de la curva, tenemos que encontrar los puntos donde la curvatura es 0. Estos puntos son aquellos donde

$$3t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{3} \iff t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En la siguiente gráfica hemos representado la curva y los puntos de inflexión, para $a = 1$.



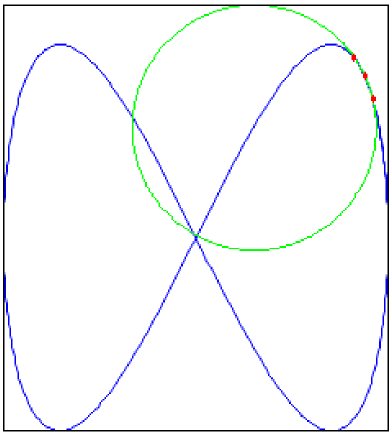
En el documento tema3.wxm se trata esta curva. ■

Un resultado importante relacionado con la curvatura es que el vector normal a una curva plana cumple

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}.$$

Ahora nos hemos centrado en la función curvatura en vez de en el vector curvatura. Una razón es que si tenemos una curva y la transformamos por un movimiento (es decir, por una transformación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal), entonces la curva transformada va a tener la misma curvatura que la curva original.

Además, la curvatura también es invariante si reparametrizamos la curva



Circunferencia osculadora

Hasta ahora, para curvas planas, hemos visto lo importante que es la curvatura. recordamos que para curvas parametrizada por la longitud de arco, la curvatura es el módulo de la derivada segunda de la ecuación paramétrica de la curva.

Pero hay más formas. Una de ellas es ver cómo varían los puntos de la curva que están muy cercanos. Podemos medirlo, por ejemplo, a partir de una circunferencia determinada por un punto de la curva $\mathbf{x}(s_0)$ y dos puntos de la curva muy cercanos a él, $\mathbf{x}(s_1)$ y $\mathbf{x}(s_2)$. La ventaja de hacerlo a partir de una circunferencia es que son curvas de curvatura constante no nula. Si hacemos que s_1 y s_2 tienda a s_0, estamos aproximando la curva por una circunferencia de radio r. Es decir, si existe el límite de los radios de las circunferencias determinadas por $\mathbf{x}(s)_0$ y los otros dos puntos

$$\lim_{s_1,s_2\to s_0} r(s_0,s_1,s_2) = r,$$

este radio va a ser una buena forma de medir la curvatura.

En la siguiente figura se ha representado la lemniscata de Bernoulli con la circunferencia en determinada para 3 puntos.

El radio de la circunferencia osculadora $r(t)$ en un punto $\mathbf{x}(t)$ se llama sentido de $\mathbf{n}(t)$. Y está situado a una distancia $r(t)$ del punto de la curva. Esto significa que el centro de la circunferencia osculadora $\mathbf{c}(t)$ verifica:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{|k(t)|}\mathbf{n}(t)$$

En el documento tema3.wxm está la determinación de la circunferencia determinada por 3 puntos para la Lemniscata, así como una animación de la variación de la circunferencia osculadora.

Una demostración de esta igualdad está en el documento ”Notas de Geometría Diferencial y aplicaciones”, de Antonio Valdés.

Nótese que si una curva tiene curvatura 0 en un punto, entonces en ese punto el radio de curvatura es infinito.

Ejemplo 7. Vamos a determinar el radio de curvatura y el centro de curvatura de la elipse, dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t).$$

Un vector tangente a la elipse en un punto $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\, t, b\cos t).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(a\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (b\cos t)^2}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (-a\cos t, -b\,\mathrm{sen}\, t). \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la curvatura:

$$\begin{aligned} k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} -a\,\mathrm{sen}\, t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\,\mathrm{sen}\, t \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{(a\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (b\cos t)^2}^3} \\ &= \frac{ab}{\cdots} \end{aligned}$$

Por otro lado, como el vector tangente es

$$\mathbf{t}\left(t\right)=\frac{\mathbf{x}'\left(t\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{\left(a\operatorname{sen}t\right)^2+\left(b\cos t\right)^2}}\left(-a\operatorname{sen}t,b\cos t\right),$$

el vector normal es

$$\mathbf{n}\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t}}\left(-b\cos t,-a\operatorname{sen}t\right).$$

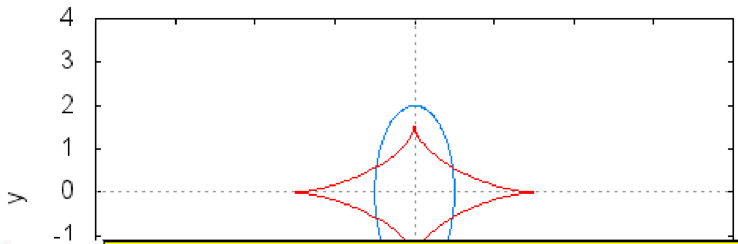
Entonces el vector curvatura es

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\left(t\right)=k\left(t\right)\mathbf{n}\left(t\right)&=\frac{ab}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t}^3}\frac{1}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t}}\left(-b\cos t,-a\operatorname{sen}t\right)\\&=\frac{ab}{\left(a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t\right)^2}\left(-b\cos t,-a\operatorname{sen}t\right).\end{aligned}$$

El centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\left(t\right)&=\mathbf{x}\left(t\right)+\frac{1}{k\left(t\right)}\mathbf{n}\left(t\right)\\&=\left(a\cos t,b\operatorname{sen}t\right)\\&+\frac{1}{ab}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t}^3\frac{1}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t}}\left(-b\cos t,-a\operatorname{sen}t\right)\\&=\left(a\cos t,b\operatorname{sen}t\right)+\frac{1}{ab}\left(a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t\right)\left(-b\cos t,-a\operatorname{sen}t\right).\end{aligned}$$

Si representamos la elipse y la curva dada por los centros de curvatura, observamos que los puntos de curvatura están situados en una curva. En este caso es la astroide.



La astroide es un hipocicloide de cuatro vértices, o que (para $a = b$) es la curva que describe un punto fijo en un círculo de radio $\frac{r}{4}$rodando en el interior de un círculo fijo de radio r.

Esta curva se trata en el documento tema3.wxm.

La curva en la que están situados los centros de curvatura de una curva dada se llama **evoluta**. Estas curvas destacadas vamos a estudiarlas más adelante.

3.2. Curvatura de una curva definida implícitamente

Al comenzar con el estudio de curvas, la describíamos como un objeto geométrico con un grado de libertad. La imaginábamos, por ejemplo, como la posición de una partícula, que depende del tiempo. En este sentido, nos podemos imaginar una curva como el conjunto de puntos del plano de coordenadas (x, y) que verifican una ecuación del tipo

$$f(x, y) = 0.$$

A esta función le pedimos algunas condiciones, al igual que pedimos que $\mathbf{x}$ sea suficientemente regular. Una es que sea diferenciable. Pero también vamos a pedir que se pueda aplicar el teorema de la función implícita, para así asegurarnos de que podemos despejar una variable y escribir, por ejemplo

$$f(x, y(x)) = 0 \text{ (o } \mathrm{f}(x(y), y) = 0).$$

Así, podemos definir curvas en forma implícita. Un ejemplo es la circunferencia de radio r, que tiene ecuaciones implícitas

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Otro ejemplo es la elipse, dada por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

para $a, b > 0$.

Si la curva está dada en forma implícita, localmente podemos aplicar el teorema de la función implícita y podemos obtener ecuaciones paramétricas.

donde si s y t son x y/o y, se utiliza la notación

$$f_{ts} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}.$$

Si denotamos como ∇f el gradiente de f, la curvatura está determinada por

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

La demostración de este resultado está en el apartado 3.4.2. del documento Antonio Valdés titulado Notas de Geometría diferencial con aplicaciones, de enero de 2009.

Ejemplo 8. Vamos a determinar la curvatura de la elipse. Las ecuaciones implícitas de la elipse son

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Calculamos el gradiente, su norma y la matriz Hessiana:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right),$$

$$\|\nabla f\| = \frac{2}{a^2 b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2},$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Entonces la curvatura en un punto (x, y) es

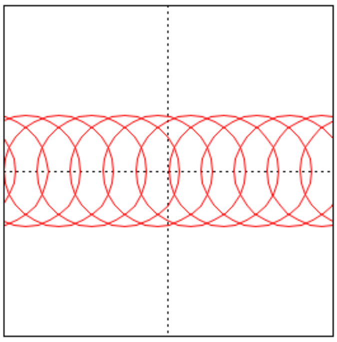
$$
\begin{aligned}
k(x,y) &= \frac{1}{2^3\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}^3}\begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{b^2} & \dfrac{2x}{a^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{b^2} \\ \dfrac{2x}{a^2}\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2^3\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}^3}\left(8\frac{y^2}{b^4a^2}+8\frac{x^2}{a^4b^2}\right) \\
&= \frac{a^6b^6}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}^3}\left(\frac{y^2}{b^4a^2}+\frac{x^2}{a^4b^2}\right) \\
&= \frac{a^6b^6}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}^3}\frac{1}{b^2a^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{a^4b^4}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}^3}. \\
&= \frac{a^4b^4}{\sqrt{b^4a^2\cos^2 t+a^4b^2\operatorname{sen}^2 t}^3} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\operatorname{sen}^2 t}^3}.
\end{aligned}
$$

porque los puntos (x, y) verifican la ecuación de la elipse. Teniendo en cuenta que se cumple $x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t$, entonces resulta:

$$
\begin{aligned}
k(x,y) &== \frac{a^4b^4}{\sqrt{b^4a^2\cos^2 t+a^4b^2\operatorname{sen}^2 t}^3} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\operatorname{sen}^2 t}^3}.
\end{aligned}
$$

Este valor coincide con el que determinamos a partir de las ecuaciones paramétricas.

3.3. Envolvente de una familia de curvas planas parametrizadas



implícitas de las curvas, pero nosotros nos vamos a centrar en las ecuaciones paramétricas porque son con las que trabajamos.

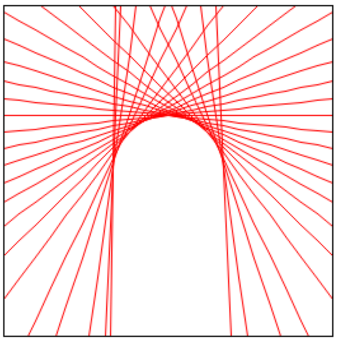
Ejemplo 9. Las circunferencias de radio 1 y con centro en el eje OX es la familia dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}\,(\lambda, t) = (\lambda + \cos t,\, \operatorname{sen} t)$$

para $t \in [0, 2\pi)$. Se representan en la siguiente figura:

Ejemplo 10. La familia de rectas, dadas por la ecuación

$$\left(\quad \frac{1 - \lambda t}{\quad} \right)$$



En esta gráfica podemos ver que las rectas parecen, de alguna forma, dejar un semicírculo al que son tangentes. Esto nos lleva a la siguiente definición.

[redacted]

Se dice que una curva es envolvente de una familia de curvas cuando en cada punto es tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas (o en cada punto es tangente a alguna curva de la familia de tal forma que cada curva de la familia es tangente a la envolvente). Ahora nos interesa ver cómo podemos determinar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas.

Vamos a pedir a la familia de curvas que todas las curvas sean regulares, pero además, vamos a pedir que la variación de cada $\mathbf{x}$ respecto a λ también sea regular, es decir, que se cumpla:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \neq 0.$$

Partimos de un punto $\mathbf{p}$ que está en la curva de la familia que corresponde al valor λ, y supongamos que a este punto le corresponde un valor de t. Si $\mathbf{p}$ es un punto de contacto de la curva y la envolvente, el valor de t que corresponde a $\mathbf{p}$ va a depender en qué curva de la familia estamos, es decir, debe haber una dependencia funcional entre t y λ, que vamos a suponer diferenciable, y que escribimos como $t = t(\lambda)$.

La ecuación de la envolvente será de la forma

$$\mathbf{e}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda, t(\lambda))$$

Este vector es paralelo a un vector tangente a uan curva de la curva, que es

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Que sean paralelos es lo mismo que decir que son linealmente dependientes, es decir, el determinante formado por las componente de estos vectores es 0, o

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\frac{dt}{d\lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = 0.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\frac{dt}{d\lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) + \frac{dt}{d\lambda}\det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Consecuentemente, para que una curva sea envolvente de una familia de curvas es condición necesaria que el determinante anterior sea 0.

Pero esto, con las condiciones que hemos pedido a la familia de curvas, es también condición necesaria (es decir, si se cumplen estas condiciones, la curva dada por **e** es una envolvente). Vamos a demostrarlo.

Suponemos que

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = 0.$$

Esta condición es lo mismo que decir que son linealmente dependientes, o que podemos escribir

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = \alpha\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\frac{dt}{d\lambda}$$

Entonces, con las condiciones de regularidad pedidas, la condición necesaria y suficiente para que una curva $\mathbf{e}(\lambda)$ sea envolvente de una familia de curvas $\mathbf{x}(\lambda, t)$ es que se cumpla

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = 0.$$

Este resultado nos dice cómo podemos determinar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas.

Ejemplo 11. Vamos a determinar la envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje OX, dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda + \cos t, \operatorname{sen} t).$$

Tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = (1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Entonces debe ser

$$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t.$$

Esto implica

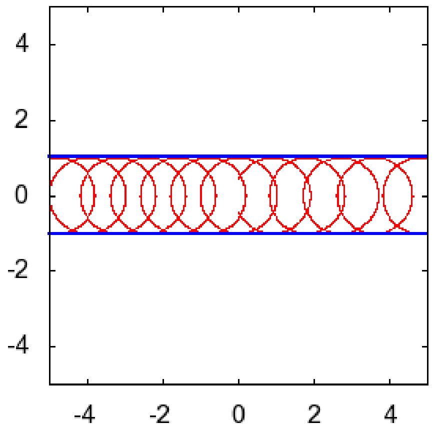
$$t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}.$$

Entonces vamos a tener dos envolventes, y sus ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (\lambda, 1), \\ \mathbf{e}_2(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = (\lambda, -1). \end{aligned}$$

Son dos rectas, paralelas al eje $= X$, y de ecuación $y = 1, y = -1$, como se aprecia en la figura:

Ejemplo 12. Vamos a determinar la envolvente de la familia de rectas, dadas



En este caso, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \left(0, \frac{-t\sqrt{1-\lambda^2} - (1-\lambda t)\frac{-2\lambda}{2\sqrt{1-\lambda^2}}}{\sqrt{1-\lambda^2}^2}\right)$$

$$= \left(0, \frac{\lambda - t}{(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = \left(1, -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right).$$

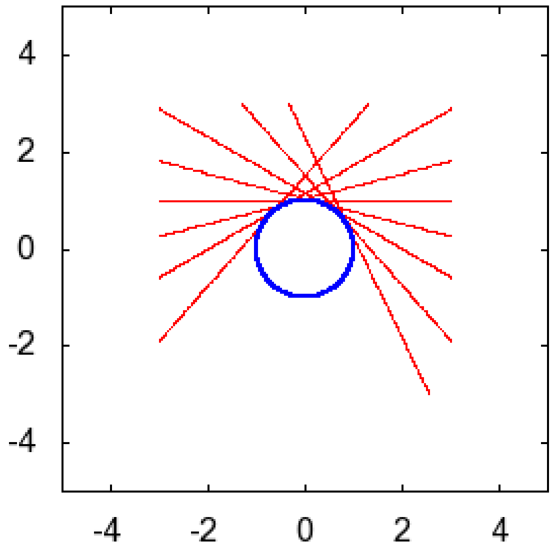
$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1-\lambda t}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)$$

Su determinante debe ser 0:

$$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda - t}{(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} & -\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda - t}{(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Esto implica que debe cumplirse:



para $\lambda \in (-1,1)$. Entonces, la ecuación de la envolvente es

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda,\lambda) &= \left(\lambda, \frac{1-\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \\ &= \left(\lambda, \sqrt{1-\lambda^2}\right), \end{aligned}$$

que se corresponde con un arco de circunferencia:

3.4. ¿Tenemos una curva plana si conocemos su curvatura?

Podemos determinar la curvatura de una curva, definida tanto paramétricamente como implícitamente. Ahora nos podemos preguntar si a partir de la función curvatura podemos "recuperar la curva", es decir, si la curvatura determina de forma única una curva en el plano. La respuesta a esta pregunta

3.5. Ecuaciones de Frenet para curvas planas

Ya conocemos los vectores tangentes $\mathbf{t}(s)$, normal y curvatura de una curva plana parametrizada por la longitud de arco.

Podemos establecer las siguientes relaciones entre ellas:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\,\mathbf{n}(s)\,,$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\,\mathbf{t}(s)\,,$$

que son las ecuaciones de Frenet.

Las ecuaciones de Frenet ponen de manifiesto que eligiendo una base (local) en el plano, con una clara interpretación geométrica, podemos expresar la velocidad de cambio de los vectores de este sistema de referencia respecto a la curvatura, que también tiene un claro significado geométrico.

Se debe estudiar estudiar en el apartado 4.2 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

3.6. Teorema fundamental de la teoría local de curvas, para curvas planas

En este apartado, se parte de las ecuaciones de Frenet para proponer un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, que se resuelven para determinar de forma única una curva, dadas la curvatura y unas condiciones iniciales.

Se debe estudiar estudiar en el apartado 4.3 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Apuntes de Complementos Matemáticos
de la Ingeniería Industrial

Ejercicios del tema 3. Curvas regulares en el plano. Estudio local y resultados globales

Versión 1.0

UNED ETS de Ingenieros Industriales

1. Determínese la curvatura de una circunferencia.

Solución. Las ecuaciones de una circunferencia de radio r que está parametrizada por el arco son

$$\mathbf{x}\left(s\right)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\ \mathrm{sen}\ \frac{s}{r}\right).$$

Su vector tangente es

$$\mathbf{x}'\left(s\right)=\left(-\ \mathrm{sen}\ \frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right).$$

Y el vector curvatura es

$$\mathbf{x}''\left(s\right)=\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},-\frac{1}{r}\ \mathrm{sen}\ \frac{s}{r}\right).$$

Su módulo es constante, es decir, la curvatura es constante:

$$k\left(s\right)=\left\|\mathbf{x}''\left(s\right)\right\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{r}\right)^{2}\cos^{2}\frac{s}{r}+\left(-\frac{1}{r}\right)^{2}\ \mathrm{sen}^{2}\frac{s}{r}}=\frac{1}{r}.$$

Intuitivamente, vemos la circunferencia como una curva que está siempre igual de “curvada”. Esta definición nos lo confirma, al tener curvatura constante.

2. Determine la curvatura de la cicloide, dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\left(rt-r\ \mathrm{sen}\,t,r-r\cos t\right),$$

con $t\in(0,2\pi)$. ¿Tiene puntos de inflexión?

Solución. No está parametrizada por el arco. Por tanto, debemos aplicar

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^{3}}.$$

Tenemos

$$\mathbf{x}'\left(t\right)=\left(r-r\cos t,r\ \mathrm{sen}\ t\right),$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} r - r\cos t & r\ \operatorname{sen} t \\ r\ \operatorname{sen} t & r\cos t \end{vmatrix} \frac{1}{\left(r\sqrt{2-2\cos t}\right)^3} \\
&= \frac{r^2\cos t - r^2\cos^2 t - r^2\ \operatorname{sen}^2 t}{r^3\left(2-2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\cos t - 1}{r\left(2-2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde $k(t) = 0$. En esta curva ocurre si

$$\cos t - 1 = 0 \iff t = 2k\pi, \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Pero no ocurre, porque $t \in (0, 2\pi)$.

3. Determine, con `Maxima`, la curvatura de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos t^2, e^{-t}\right).$$

Solución. Para determinar la curvatura con Maxima, primero definimos las componentes de la curva y luego creamos un vector con estas componentes.

```
>>  x1(t):=(cos(t^2));
    x2(t)=exp(-t);
    x(t):=[x1(t),x2(t)];
```

Ahora podemos calcular los vectores derivada primera, segunda y el módulo de la derivada primera::

```
>>  define(tangente(t),diff(x(t),t,1));
    define(dsegunda(t),diff(x(t),t,2));
    norma:(tangente(t).tangente(t))^(3/2);
```

Ya tenemos todo lo que necesitqamos. Ahora calculamos el determinante, tras crear la matriz:

```
>>    wxplot2d(['parametric, x1(t),x2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]], [x,-5,5])$
```

Realice los ejercicios 112 y 114 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

4. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, 4t\right).$$

   a) Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0)$.

   b) Determine el vector curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0,0)$.

Solución:

a) Un vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (2t, 4).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(2t)^2 + 4^2} = 2\sqrt{t^2+4}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (2,0). \end{aligned}$$

Con estos datos, calculamos la curvatura.

$$\begin{aligned} k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\left(2\sqrt{t^2+4}\right)^3} \\ &= -\frac{1}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Entonces el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$ es *b*) El vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(2t, 4).$$

Entonces, el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(-4, 2t)$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) &= -\frac{1}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(-4, 2t)\\ &= \left(\frac{2}{(t^2+4)^2}, \frac{t}{(t^2+4)^2}\right).\end{aligned}$$

5. Determínese la evoluta de la astroide de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t\right).$$

Solución: Es otra astroide. Vamos a comprobarlo.

Un vector tangente a la astroide en un punto es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\right).$$

Su módulo es

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t)^2 + (3a \operatorname{sen}^2 t \cos t)^2}\\ &= 3a\,|\cos t \operatorname{sen} t|\,\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\\ &= 3a\,|\cos t \operatorname{sen} t|.\end{aligned}$$

Este módulo es 0 cuando $t = k\frac{\pi}{2}$ para un número k entero y también $\mathbf{x}'(t) = 0$ en estos puntos. Entonces, si $t = k\frac{\pi}{2}$ no va a haber vector tangente a la astroide en estos puntos. Pero si $t \neq k\frac{\pi}{2}$ podemos calcular los vectores tangente y normal, que son:

Para determinar $k(t)$ necesitamos conocer:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}''(t) &= \left(6a\,\operatorname{sen}^2 t\cos t - 3a\cos^3 t, 6a\cos^2 t\,\operatorname{sen} t - 3a\,\operatorname{sen}^3 t\right) \\
&= \left(6a\cos t - 9a\cos^3 t, 9a\cos^2 t\,\operatorname{sen} t - 3a\,\operatorname{sen} t\right).
\end{aligned}
$$

A partir de los resultados anteriore, calculamos la curvatura y el radio de curvatura:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} -3a\cos^2 t\,\operatorname{sen} t & 6a\cos t - 9a\cos^3 t \\ 3a\,\operatorname{sen}^2 t\cos t & 9a\cos^2 t\,\operatorname{sen} t - 3a\,\operatorname{sen} t \end{vmatrix}\frac{1}{\left(3a\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|\right)^3} \\
&= -\frac{1}{3a}\frac{\cos^2 t\,\operatorname{sen}^2 t}{\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|^3} = -\frac{1}{3a\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|}, \\
r(t) &= 3a\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|.
\end{aligned}
$$

El cálculo de este cociente no presenta problemas porque el denominador se anule, ya que hemos eliminado los puntos donde esto ocurría. Entonces el vector curvatura es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) &= -\frac{1}{3a\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|}\frac{\cos t\,\operatorname{sen} t}{\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right) \\
&= -\frac{1}{3a\cos t\,\operatorname{sen} t}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right) \\
&= \left(\frac{1}{3a\cos t}, \frac{1}{3a\,\operatorname{sen} t}\right).
\end{aligned}
$$

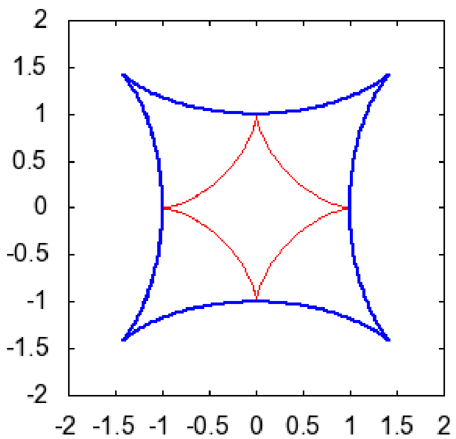
Y el centro de curvatura es el punto

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t) \\
&= \left(a\cos^3 t, a\,\operatorname{sen}^3 t\right) - 3a\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|\frac{\cos t\,\operatorname{sen} t}{\left|\cos t\,\operatorname{sen} t\right|}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right) \\
&= \left(a\cos^3 t, a\,\operatorname{sen}^3 t\right) + 3a\left(\operatorname{sen}^2 t\cos t, \cos^2 t\,\operatorname{sen} t\right) \\
&= \left(a\cos^3 t + 3a\,\operatorname{sen}^2 t\cos t, a\,\operatorname{sen}^3 t + 3a\cos^2 t\,\operatorname{sen} t\right)
\end{aligned}
$$

tenemos una nueva expresión de la evoluta de la astroide:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\,(t) &= \left(-a\frac{3\cos t+\cos 3t}{2}+3a\cos t, 3a\ \mathrm{sen}\, t-a\frac{3\ \mathrm{sen}\, t-\ \mathrm{sen}\, 3t}{2}\right)\\ &= \left(\frac{3}{2}a\cos t-\frac{1}{2}a\cos 3t, \frac{3}{2}a\ \mathrm{sen}\, t+\frac{1}{2}a\ \mathrm{sen}\, 3t\right).\end{aligned}$$

esta curva es una nueva astroide. Si tomamos $a=1$ y representamos la astroide en rojo, su evoluta es la curva que está en azul en la siguiente figura:



Realice el ejercicio 123 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

6. Determínese la envolvente de la familia de circunferencias de centro $\left(\sqrt{2}\lambda, 0\right)$ y radio λ, para $\lambda\in(0,\infty)$.

   Solución: La ecuación paramétrica de la familia es:

$$\mathbf{x}\,(t)=\left(\sqrt{2}\lambda+\lambda\cos t, \lambda\ \mathrm{sen}\, t\right),$$

para $t\in[0,2\pi)$ ya que la ecuación de una circunferencia de centro $\mathbf{c}$ y

Entonces debe ser

$$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} + \cos t & -\lambda \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \lambda \cos t \end{vmatrix}$$
$$= \sqrt{2}\lambda \cos t + \lambda.$$

Esto se cumple cuando

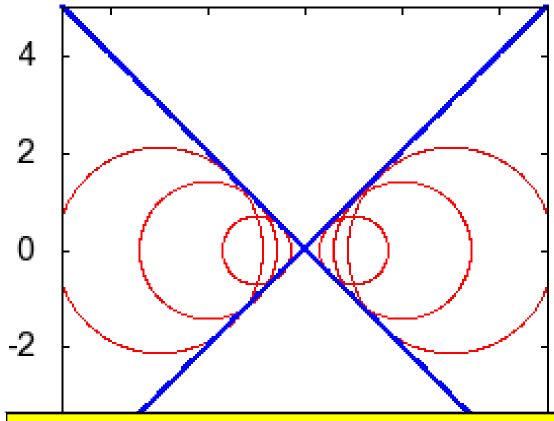
$$\cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff t = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\iff t = \frac{3\pi}{4},\ t = \frac{5\pi}{4}.$$

Por eso, la envolvente son dos rectas, de ecuaciones:

$$\mathbf{e}_1(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\lambda + \lambda \cos\frac{3\pi}{4}, \lambda \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda, \frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda\right),$$
$$\mathbf{e}_2(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{5\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\lambda + \lambda \cos\frac{5\pi}{4}, \lambda \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda\right).$$

Estas rectas también se pueden escribir como

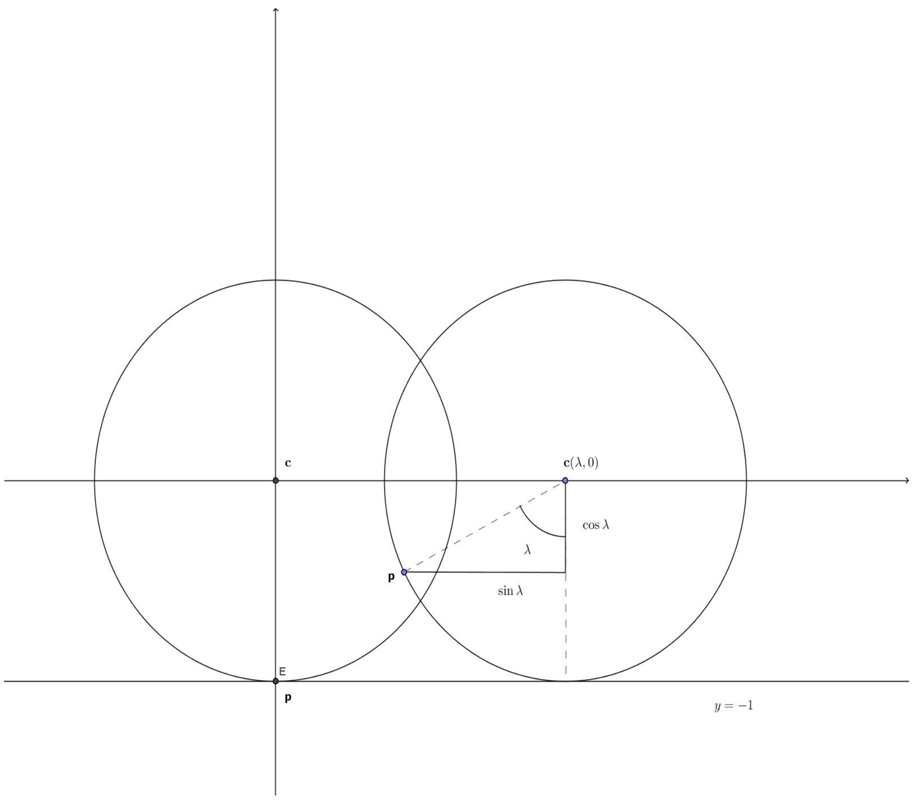
$$\mathbf{e}_1(\lambda) = (\lambda, \lambda), \quad \mathbf{e}_2(\lambda) = (\lambda, -\lambda).$$



7. Si consideramos un círculo de radio 1 que rueda sin deslizar sobre la recta $y = -1$, tenemos una cicloide. En $t = 0$, elegimos el diámetro del círculo que coincide con el eje OX. Cuando el círculo rueda, este diámetro describe una familia de rectas. Demostrar que la cicloide es la envolvente de esta familia de rectas.

   Nota: La ecuación de una cicloide rodando sobre ela recta $y = -1$ es del tipo $\mathbf{x}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$.

   Solución: La ecuación del diámetro en $t = 0$ es $y = 0$. Al rodar un ángulo λ en el sentido de las agujas del reloj, hacia las x positivas, las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ que une $\mathbf{c} = (\lambda, 0)$ y $\mathbf{p}$ son $(-\operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda)$.



Las derivadas parciales verifican:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) &= (1 - t\cos\lambda, -t \operatorname{sen}\lambda)\,, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) &= (-\operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda)\,.\end{aligned}$$

El determinante d ela matriz que forman debe ser 0:

$$\begin{aligned}0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) &= \begin{vmatrix} 1 - t\cos\lambda & -\operatorname{sen}\lambda \\ -t \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{vmatrix} \\ &= \cos\lambda - t.\end{aligned}$$

Por eso, la envolvente son dos rectas, de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda, \cos\lambda) &= (\lambda - \cos\lambda \operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda\cos\lambda) \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\lambda, \frac{\cos 2\lambda - 1}{2}\right).\end{aligned}$$

Realice los ejercicios 128, 129, 130, 131, 132, 133 y 134 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

8. (**Ejercicio 163 de "Notas de Geometría diferencial con aplicaciones"**) Utilícese el teorema que acabamos de ver para encontrar $\theta(s)$ en el caso de que
$$f(s) = \left(\frac{2s}{1+s^2}, \frac{1-s^2}{1+s^2}\right).$$

Solución: El teorema dice: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo conexo y sea $f : I \to S^1$ una función diferenciable. Entonces existe una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$. Además, cualquier otra función $\overline{\theta} : I \to \mathbb{R}$ con la misma propiedad difiere de θ en un múltiplo entero de 2π. Recordamos que S^1 es la circunferencia de radio 1.

Tenemos qeu buscar $\theta(s)$ tal que

y θ_0 está dado por la condición $f(s_0) = (\cos\theta_0,\ \operatorname{sen}\theta_0)$. Tomamos, por ejemplo, $s_0 = 0$, y tenemos

$$f(0) = (1, 0) = (\cos\theta_0,\ \operatorname{sen}\theta_0) \implies \theta_0 = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \left(\tfrac{2}{s^2+1} - 4\tfrac{s^2}{(s^2+1)^2},\quad -2\tfrac{s}{s^2+1} - 2\tfrac{s}{(s^2+1)^2}\left(-s^2+1\right) \right) \\
&= \left(\frac{2-2s^2}{(s^2+1)^2}, \frac{-4s}{(s^2+1)^2} \right), \\
f(0) &= (0, 1),
\end{aligned}$$

hacemos

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_0^s \left(v'(\xi)\, u(\xi) - u'(\xi)\, v(\xi)\right) d\xi + 0 \\
&= \int_0^s \left(\frac{-4s}{(s^2+1)^2} \frac{2s}{1+s^2} - \frac{2-2s^2}{(s^2+1)^2} \frac{1-s^2}{1+s^2} \right) ds \\
&= \int_0^s -2\frac{2s^2+s^4+1}{(s^2+1)^3} ds \\
&= -2\int_0^s \frac{1}{s^2+1} ds \\
&= -2\left(\operatorname{arctg} s\right)\Big|_0^s \\
&= -2\operatorname{arctg} s.
\end{aligned}$$

La integral es una integral racional que se resuleve descomponiendo en fracciones simples.

9. (**Ejercicio 164 de "Notas de Geometría diferencial con aplicaciones"**) Encúentrese la curvatura de la curva $\mathbf{x}(t) = e^t(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$ calculando $\theta'(s)$.

   Solución: Primero tenemos que ver si la curva está parametrizada por la longitud de arco y, en caso de que no lo esté, parametrizarla. Para ello, calculamos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= e^t(\cos t,\ \operatorname{sen} t) + e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t) \\
&= e^t(\cos t - \operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t + \cos t), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{e^{2t}\left((\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2\right)} \\
&= e^t\sqrt{2\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2}e^t, \\
s\,(t) &= \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}e^t dt \\
&= \sqrt{2}\, e^t\big|_{t_0}^{t}.
\end{aligned}
$$

Si tomamos $t_0 = 0$ y $t \geq 0$, tenemos

$$
s\,(t) = \sqrt{2}\left(e^t - 1\right).
$$

El cambio de variable es, en ese caso,

$$
\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 = e^t \implies t = \ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.
$$

La curva, parametrizada por el arco, es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) &= e^{\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\left(\cos\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Sabemos que si $f\,(s) = (u\,(s)\,, v\,(s)) = \mathbf{t}\,(s)$, entonces $\theta'\,(s) = k\,(s)$. Como

$$
\theta\,(s) = \int_{s_0}^{s} \left(v'\,(\xi)\,u\,(\xi) - u'\,(\xi)\,v\,(\xi)\right) d\xi + \theta_0,
$$

Por eso, tenemos que determinar

$$
\begin{aligned}
f(s) &= (u(s), v(s)) = \mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right),\right. \\
&\quad \left.\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Además:

$$
\begin{aligned}
u'(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(-\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right), \\
v'(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo, tenemos

$$
\begin{aligned}
k(s) &= \theta'(s) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right) \\
&\cdot\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right) \\
&\cdot\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Realice los ejercicios 165 y 167 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

Realice el ejercicio 168 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 4. Curvas regulares en el espacio. Estudio local y resultados globales.

Versión 1.1

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

1. Curvas en el espacio. Visualización en el ordenador. 4
2. Definiciones y primeros resultados 11
   2.1. Curvatura de una curva espacial no parametrizada por la longitud de arco 17
3. Vector binormal. Fórmulas de Frenet. 27
4. Forma canónica local de una curva 33

1. Curvas en el espacio. Visualización en el ordenador.

Ya conocemos las curvas en el plano. Vamos a generalizar lo anterior al espacio, donde además aparecerán nuevas características de las curvas. Vimos que podemos interpretar intuitivamente una curva como la trayectoria que describe una partícula o un móvil. Suponíamos que depende del tiempo t y que la posición de la partícula está dada por la función $\mathbf{x}(t)$, donde para curvas en el espacio, es $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Igual que para curvas en el plano, la velocidad de la partícula está dada por la función (vamos a suponer que las componentes tienen tantas derivadas como necesitemos)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}.$$

Además, conociendo la posición, $\mathbf{x}_0$, en el instante t_0 de la partícula y su velocidad $\mathbf{v}(t)$, la trayectoria de la curva es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(s)\, ds.$$

La aceleración de una curva es la derivada de la velocidad, es decir es $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Comenzamos con ejemplos de curvas en el espacio.

Ejemplo 1. Todas las curvas del plano son curvas en el espacio. Una forma sencilla de verlo es considerando que su tercera componente, $z(t)$ vale 0. ▬

Ejemplo 2. Por analogía con los ejemplos de curvas planas, vemos que un punto es una curva espacial, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a, b, c).$$

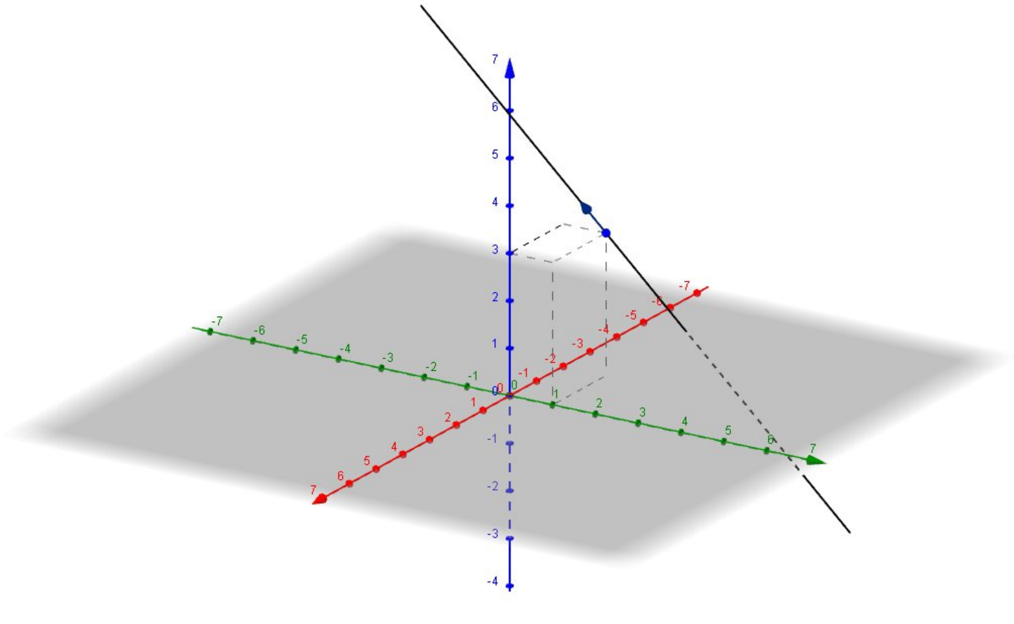
Su velocidad es nula, $\mathbf{v}(t) = (0, 0, 0)$. Una recta también es una curva espay que en un instante $t = t_0$ pasa por el punto (a, b, c), la ecuación de la recta es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(s)\, ds = (a, b, c) + \left(\int_{t_0}^{t} v_1 ds, \int_{t_0}^{t} v_2 ds, \int_{t_0}^{t} v ds \right)$$
$$= (a + v_1 t - v_1 t_0, b + v_2 t - v_2 t_0, c + v_3 t - v_3 t_0)\,.$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = a + v_1 (t - t_0)\,,$$
$$y = b + v_2 (t - t_0)\,,$$
$$z = c + v_3 (t - t_0)\,.$$

La gráfica del punto $(-2, 1, 3)$ y la recta que en $t = 0$ está en ese punto y tiene velocidad constante $(1, 0, 1)$ se representa en la siguiente figura:



Señalamos, sin detenernos en ello, que una recta en el espacio puede ser

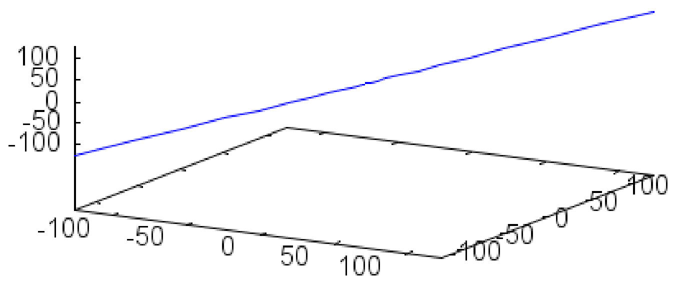
En efecto:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(3t^2, 3t^2, 3t^2\right).$$

Además, la aceleración es constante, porque

$$\mathbf{x}''(t) = (6t, 6t, 6t).$$

La gráfica de esta curva es



y para representarla con `Maxima` hemos utilizado las sentencias:

```
-> load(draw)$
   draw3d(parametric(t^3-1,t^3,t^3+1,t,-5,5));
```

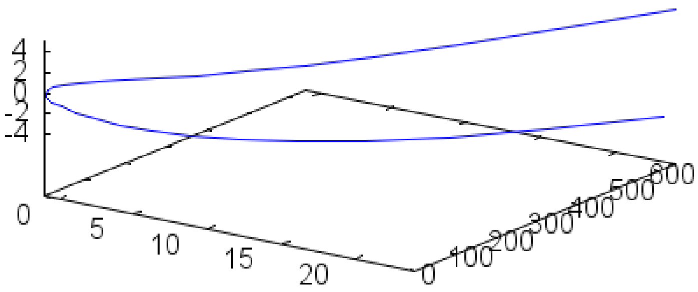
Recordamos que si se utiliza `wxdraw` la gráfica se representa en el mismo documento de `Maxima` y que si se escribe `draw`, la representación es en una nueva ventana que se puede girar con el ratón. Esto ayuda a visualizar con más facilidad la curva. ▬

Ejemplo 4. Las componentes de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2 - 1, t^4 + 3t + 2, t\right)$$

son polinomios. Su representación gráfica es, hecha con Maxima a partir de

```
-> load(draw)$
```



Las curvas cuyas componentes son polinomios se llaman curvas polinómicas.

■

Al estudiar las curvas polinómicas, vimos las curvas de Bézier, donde estas curvas están determinadas a partir de coeficientes ordenados del polígono de control, $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0,\ldots n}$, y expresadas en la base dada por los polinomios de Bernstein de grado n, $B_i^n(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i},$$

para $t \in [0,1]$. Vimos propiedades de estas curvas, como que son invariantes por transformaciones afines, que la curva está contenida en la clausura convexa del políogono de control o que se cumple:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0, \ \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n.$$

Ahora señalamos que todo el desarrollo hecho para las curvas de Bézier es válido si el polígono de control no está en el plano, sino en el espacio, es decir, si $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$.

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

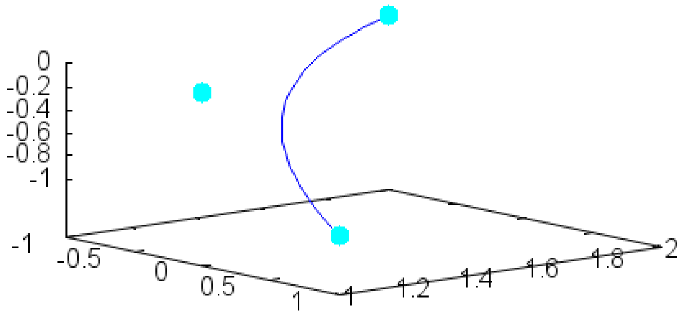
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \; B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (-1,2,0)\, B_0^2(t) + (0,1,0)\, B_1^2(t) + (1,1,-1)\, B_2^2(t) \\
&= (-1,2,0)\binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 + (0,1,0)\binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 + (1,1,-1)\binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 \\
&= (-1,2,0)\, t^0 (1-t)^2 + (0,1,0)\, 2t^1 (1-t)^1 \\
&S + (1,1,-1)\, t^2 (1-t)^0 \\
&= \left(t^2 - (1-t)^2, t^2 + 2t(1-t) + 2(1-t)^2, -t^2\right) \\
&= \left(2t-1, t^2 - 2t + 2, -t^2\right).
\end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



Ejemplo 6. Escribamos la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier.

El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 \\
&+ \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1, z_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2, z_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3, z_3) t^3 \\
&= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3 + 3tx_1 - 6t^2 x_1 + 3t^3 x_1 + 3t^2 x_2 - 3t^3 x_2 + t^3 x_3 \\ y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3 + 3ty_{01} - 6t^2 y_1 + 3t^3 y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^3 y_2 + t^3 y_3 \\ z_0 - 3tz_0 + 3tz_1 + 3t^2 z_0 - 6t^2 z_1 - t^3 z_0 + 3t^2 z_2 + 3t^3 z_1 - 3t^3 z_2 + t^3 z_3 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + 3(-x_0 + x_1) t + 3(x_0 - 2x_1 + x_2) t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) t^3 \\ y_0 + 3(-y_0 + y_1) t + 3(y_0 - 2y_1 + y_2) t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) t^3 \\ z_0 + 3(-z_0 + z_1) t + 3(z_0 - 2z_1 + z_2) t^2 + (-z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3) t^3 \end{pmatrix}^t \\
&= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
\end{aligned}
$$

Igualando la tercera componente, obtenemos:

$$z_0 + 3(-z_0 + z_1) t + 3(z_0 - 2z_1 + z_2) t^2 + (-z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3) t^3 = t^2,$$

lo que implica

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0, \\
-z_0 + z_1 = 0 &\Longrightarrow z_1 = z_0 = 0,
\end{aligned}
$$

significando

$$\begin{aligned} y_0 &= -1, \\ 3\left(-y_0 + y_1\right) &= 3\left(1 + y_1\right) = 4 \Longrightarrow y_1 = \frac{1}{3}, \\ 3\left(y_0 - 2y_1 + y_2\right) &= 3\left(-1 - \frac{2}{3} + y_2\right) = 0 \Longrightarrow y_2 = \frac{5}{3}, \\ \left(-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3\right) &= \left(1 + 1 - 5 + y_3\right) = 0 \Longrightarrow y_3 = 3. \end{aligned}$$

Con la primera componente de los vértices del polígono de control, hacemos

$x_0{+}3\left(-x_0 + x_1\right)t{+}3\left(x_0 - 2x_1 + x_2\right)t^2{+}\left(-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3\right)t^3 = t^3{-}2t{+}1.$

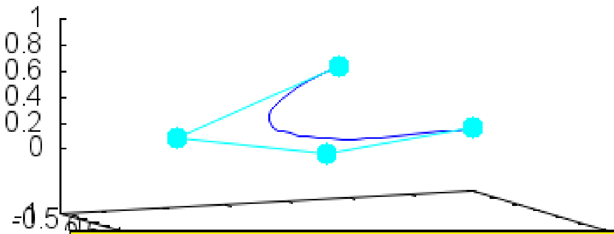
Resolvemos y obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ 3\left(-x_0 + x_1\right) &= 3\left(-1 + x_1\right) = -2 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \\ 3\left(x_0 - 2x_1 + x_2\right) &= 3\left(1 - \frac{2}{3} + x_2\right) = 0 \Longrightarrow x_2 = -\frac{1}{3}, \\ -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 + 1 + 1 + x_3 = 1 \Longrightarrow x_3 = 0. \end{aligned}$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2\right) = \mathbf{b}_0 B_0^3\left(t\right) + \mathbf{b}_1 B_1^3\left(t\right) + \mathbf{b}_2 B_2^3\left(t\right) + \mathbf{b}_3 B_3^3\left(t\right) \\ &= \left(1, -1, 0\right) B_0^3\left(t\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) B_1^3\left(t\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) B_2^3\left(t\right) + \left(0, 3, 1\right) B_3^3\left(t\right). \end{aligned}$$

La gráfica es:



2. Definiciones y primeros resultados

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.4. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Siguiendo con el desarrollo realizado para curvas en el plano, resumimos las principales definiciones y resultados ya hechos para estas curvas, y que son totalmente válidos para curvas en el espacio, es decir, para curvas en $\mathbb{R}^3$.

Partimos de curvas dadas por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde la función $\mathbf{x}$ es al menos diferenciable una vez (aunque a veces vamos a pedir que sea diferenciable más de una vez). Aunque lo que sigue ya lo estudiamos en general, vamos a repasar los conceptos de punto regular y singular, curva regular, punto múltiple y longitud de arcos con algunos ejemplos.

Comenzamos con curvas que no están necesariamente parametrizadas por la longitud de arco. La variable es t y la curva es:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

la parametrización no influye para determinar puntos singulares y regulares o puntos múltiples.

Ejemplo 7. Sea C la curva definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3 - 3t, t^2 + e^t)$, para $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$. Vamos a estudiar si tiene puntos singulares y si es una curva regular. Además, estudiaremos si el vector $\mathbf{x}'(t_0)$, que es tangente a C en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ no singular puede ser perpendicular al plano xy.

Primero determinamos el vector $\mathbf{x}'(t)$:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, 3t^2 - 3, 2t + e^t\right) \neq (0,0,0)$$

para cualquier t, porque la primera componente siempre es distinta de 0. Por tanto, la curva no tiene puntos singulares y como la función que la define es diferenciable (las componente son derivables) es una curva regular.

Además, el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, 3t^2 - 3, 2t + e^t\right),$$

y tiene la misma dirección y sentido que el vector tangente. Para que sea

Ejemplo 8. Determinemos si la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(1, t^2 - 2t, 2t^2\right)$$

tiene puntos múltiples.

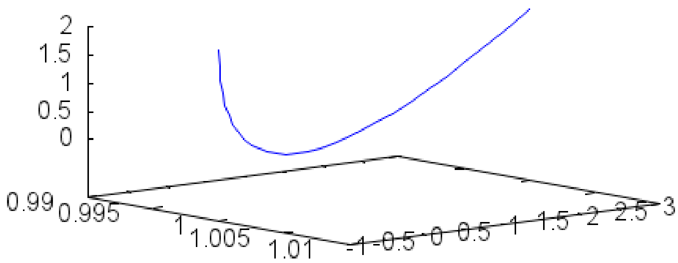
Tiene puntos múltiples y si y sólo si

$$\left(1, t^2 - 2t, 2t^2\right) = \left(1, t_1^2 - 2t_1, 2t_1^2\right).$$

La primera coordenada coincide siempre. La tercera coordenada es igual si y sólo si $t = \pm t_1$. Nos interesa sólo cuando $t = -t_1$. En ese caso, debe cumplirse, en la segunda coordenada:

$$\begin{aligned} t^2 - 2t &= (-t_1)^2 - 2(-t_1) = t_1^2 + 2t_1 = t^2 + 2t_1 \\ &\Longrightarrow t = t_1 \iff t = 0. \end{aligned}$$

Por eso, la curva no tiene puntos múltiples. Su gráfica es



$\blacksquare$

Sabemos que un vector tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = t_0$ es el vector derivada $\mathbf{x}'(t_0)$. El **vector tangente** es un vector con su misma dirección y sentido, pero unitario, es decir, es el vector

Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2t\cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \cos t, 3\right), \ \mathbf{x}'(0) = (0,1,3).$$

Por eso, el vector tangente a la curva en $t = 0$ es

$$\mathbf{v} = \frac{(0,1,3)}{\|(0,1,3)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,3).$$

■

Ejemplo 10. Calculemos la longitud de un paso de hélice circular de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$.

Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 3).$$

Un paso de hélice es la porción de curva comprendida entre los valores t_1 y $t_1 + 2\pi$. Por eso, en este caso, tenemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 3^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = 2\sqrt{10}\pi.$$

■

La expresión de una curva parametrizada por la longitud de arco es

$$\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Si la variable es s nos vamos a referir a curvas parametrizadas por la longitud de arco, aunque no lo indiquemos entonces. Y si la variable es t a curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

El vector tangente para una curva parametrizada por el arco, que llamaremos $\mathbf{t}(s)$, verifica:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

La función curvatura o **curvatura** es su módulo, es decir, es

$$k(s) = \left\| \mathbf{x}''(s) \right\| .$$

Observamos que la curvatura siempre es positiva.

Ejemplo 11. El vector curvatura y la curvatura de una recta en el espacio es 0, tal como ocurría con rectas en el plano.

Ejemplo 12. Vimos que una parametrización por la longitud de arco de la hélice dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, -t),$$

para $t \in (-10, 10)$, considerando $t_0 = 0$, era

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t) = \left(4\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, 4\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{s}{\sqrt{17}}\right).$$

Vamos a determinar el vector curvatura y la función curvatura de esta parametrización.

Tenemos que el vector tangente es:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

El vector curvatura es

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{4}{17}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{17}}, 0\right).$$

La función curvatura es

$$\begin{aligned} k(s) = \left\| \mathbf{x}''(s) \right\| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{17}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{17}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left(\cos^2\frac{s}{\sqrt{17}} + \mathrm{sen}^2\frac{s}{\sqrt{17}}\right)} \\ &= \frac{4}{\,} \end{aligned}$$

Ejemplo 13. La hélice del ejemplo anterior no tiene puntos de inflexión, porque

$$k(s) = \frac{4}{17} \neq 0$$

para todo s.

Recordamos que para curvas planas, la curvatura determina de forma única la curva, salvo movimientos en el plano, por el teorema fundamental de la toería de curvas planas. Esto no ocurre con las curvas en el espacio. Un ejemplo está en la hélice del ejemplo anterior, con curvatura constante $\frac{4}{17}$ y en la circunferencia de radio $\frac{17}{4}$, dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{17}{4} \cos t, \frac{17}{4} \operatorname{sen} t, 1 \right),$$

que tiene esta misma curvatura. Obviamente, ambas curvas no son la misma. Necesitamos algo más, como veremos más adelante.

Tal como pasaba con las curvas planas, para curvas espaciales parametrizadas por la longitud de arco, los vectores tangente $\mathbf{t}(s)$ y curvatura $\mathbf{k}(s)$ son perpendiculares, porque:$\|\mathbf{x}'(s)\|^2 = 1$, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 1.$$

Derivamos esta expresión y tenemos en cuenta las propiedades del producto escalar, para llegar a:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 2\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 0.$$

Esto significa que el vector derivada segunda (que es el vector curvatura $\mathbf{k}(s)$) es perpendicular al vector tangente $\mathbf{t}(s)$, o que la aceleración de una curva parametrizada por el arco es tangente a la velocidad.

Ejemplo 14. Comprobamos que los vectores tangente y curvatura de la hélice circular de los ejemplos anteriores son ortogonales. Sabemos que

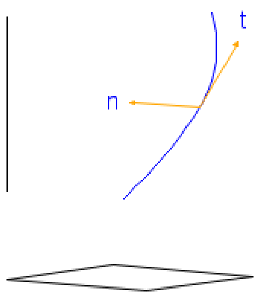
Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{k}(s) &= -\frac{4}{\sqrt{17}}\left(-\frac{4}{17}\right)\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}\cos\frac{s}{\sqrt{17}} \\
&+\frac{4}{\sqrt{17}}\left(-\frac{4}{17}\right)\cos\frac{s}{\sqrt{17}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}0 \\
&=\frac{16}{17\sqrt{17}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}-\frac{16}{17\sqrt{17}}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}} \\
&=0.
\end{aligned}$$

Para curvas en el espacio, el vector tangente no tiene un único vector normal. Sin embargo, cuando $\mathbf{x}''(s)\neq(0,0,0)$ (es decir, cuando un punto no es punto de inflexión) hay un vector normal privilegiado, y es el vector

$$\mathbf{n}(s)=\frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|}.$$

Se llama **vector normal** (a veces, se llama también vector normal principal). Observe que hemos elegido el vector normal de forma que para curvas parametrizadas por el arco, tiene la misma dirección y sentido que el vector curvatura. En la siguiente figura se representan los vectores tangente y normal:



Ejemplo 15. Determinamos el vector normal de la hélice circular de los ejemplos anteriores. Sabemos que

$$\mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{4}{17}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}, 0\right),$$
$$k(s) = \frac{4}{17}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|} \\ &= \frac{17}{4}\left(-\frac{4}{17}\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}, 0\right) \\ &= \left(\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}, 0\right).\end{aligned}$$

■

2.1. Curvatura de una curva espacial no parametrizada por la longitud de arco

Tal como hicimos con curvas planas, podemos determinar la curvatura de una curva espacial sin necesidad de parametrizarla por el arco. Podemos seguir el mismo desarrollo realizado para las curvas planas, llegando a:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(s(t)) &= \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.\end{aligned}$$

No repetimos este desarrollo, pues es igual al realizado al estudiar curvas planas, ya que no se tuvo en cuenta que trabajábamos en $\mathbb{R}^2$ para llegar a él.

No obstante, el vector normal $\mathbf{n}(t)$ a la curva en un punto tiene la misma dirección y sentido que el vector curvatura. Por eso, conociendo la curvatura y el vector normal, también podemos determinar $\mathbf{k}(t)$.

por el arco, y así saber que:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}''(s)\times\mathbf{x}'(s)\right\| &= \left\|\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2}\times\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}\right\| \\
&= \left\|\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2}\right\|\left\|\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}\right\| \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\
&= \left\|\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2}\right\|.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
k(t) = \left\|\mathbf{x}''(s)\right\| &= \left\|\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2}\right\| \\
&= \left\|\mathbf{x}''(s)\times\mathbf{x}'(s)\right\| \\
&= \left\|\left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right)\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| \\
&= \left\|\left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right)\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\|+\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| \\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{dt}{ds}\left\|\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\| \\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{dt}{ds}\left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}\right\| \\
&= \frac{\left\|\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}\right\|}{\left\|\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|^3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Determinemos la función curvatura de la curva dada por las ecuaciones

$$\left(t^2-1 \quad 1-t^2 \quad \right)$$

Para esta curva, tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(4\frac{t}{(1+t^2)^2}, \frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2}, 1\right),$$
$$\mathbf{x}''(t) = \left(4\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}, 4t\frac{t^2-3}{(1+t^2)^3}, 0\right),$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{\left(4\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\sqrt{1+4t^2+t^4}, \\ \mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\frac{t}{(1+t^2)^2} & \frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2} & 1 \\ 4t\frac{t^2-3}{(1+t^2)^3} & 4t\frac{t^2-3}{(1+t^2)^3} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{4t\,(t^2-3)}{(1+t^2)^5}\left(-1-2t^2-t^4, 1+2t^2+t^4, 4t+t^4-1+4t^2\right).\end{aligned}$$

Su módulo es

$$\begin{aligned} m &= \frac{4\left|t\,(t^2-3)\right|}{(1+t^2)^5}\sqrt{(-1-2t^2-t^4)^2+(1+2t^2+t^4)^2+(4t+t^4-1+4t^2)^2} \\ &= \frac{4\left|t\,(t^2-3)\right|}{(1+t^2)^5}\sqrt{3+16t^2+26t^4+16t^6+3t^8+8t^5-8t+32t^3}.\end{aligned}$$

Por tanto, la función curvatura es

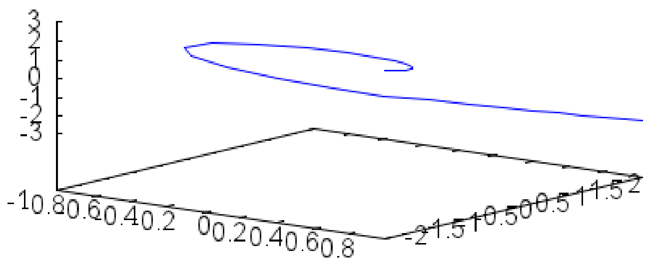
$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\frac{4\left|t(t^2-3)\right|}{(1+t^2)^5}\sqrt{3+16t^2+26t^4+16t^6+3t^8+8t^5-8t+32t^3}}{\frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\sqrt{1+4t^2+t^4}} \\ &= \frac{4\left|t\,(t^2-3)\right|(1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)^5}\frac{\sqrt{3+16t^2+26t^4+16t^6+3t^8+8t^5-8t+32t^3}}{\sqrt{1+4t^2+t^4}} \end{aligned}$$

$$4\left|t\,(t^2-3)\right|\sqrt{3+16t^2+26t^4+16t^6+3t^8+8t^5-8t+32t^3}$$

Por eso, tres puntos de inflexión son los puntos:

$$\mathbf{x}(0) = \left(\frac{0^2-1}{1+0^2}, 0\frac{1-0^2}{1+0^2}, 0\right) = (-1,0,0),$$
$$\mathbf{x}\left(\sqrt{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}^2-1}{1+\sqrt{3}^2}, \sqrt{3}\frac{1-\sqrt{3}^2}{1+\sqrt{3}^2}, \sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right),$$
$$\mathbf{x}\left(-\sqrt{3}\right) = \left(\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2-1}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}, -\sqrt{3}\frac{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}, -\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$$

Una representación gráfica de esta curva es la siguiente:



$\blacksquare$

No vamos a demostrarlo, pero es interesante señalar, que el vector

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Para comprobarlo, lo multiplicamos escalarmente por $\mathbf{x}'(t)$:

$$((\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

Pero siguiendo con estos cálculos, demostramos que podemos obtener el vector normal restando a $\mathbf{x}''(t)$ la proyección de este vector sobre la recta tangente, porque

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t))\times\mathbf{x}'(t) &= -\mathbf{x}'(t)\times(\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t))\\ &= -\mathbf{x}'(t)(\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}''(t))+\mathbf{x}''(t)(\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t))\\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2\mathbf{x}''(t)-\mathbf{x}'(t)\|\mathbf{x}'(t)\|\,\|\mathbf{x}''(t)\|\cos\alpha\\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2\mathbf{x}''(t)-\|\mathbf{x}'(t)\|^2\frac{\|\mathbf{x}''(t)\|\cos\alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\mathbf{x}'(t)\\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2\left(\mathbf{x}''(t)-\frac{\|\mathbf{x}''(t)\|\cos\alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\mathbf{x}'(t)\right),\end{aligned}$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$. Como

$$\frac{\|\mathbf{x}''(t)\|\cos\alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\mathbf{x}'(t)$$

es la proyección de $\mathbf{x}''(t)$ sobre la recta con la dirección de $\mathbf{x}'(t)$, entonces tenemos que $(\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t))\times\mathbf{x}'(t)$ es proporcional al vector que resulta de restar a $\mathbf{x}''(t)$ la proyección de este vector sobre la recta tangente. Esta idea geométrica tan clara también es válida para curvas planas. Pero además, el desarrollo anterior nos dice que la orientación como base del plano de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ para la curva parametrizada por la longitud de arco, es la misma que la de la base $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$ cuando la curva no está parametrizada por la longitud de arco.

La expresión

$$(\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t))\times\mathbf{x}'(t),$$

que nos da un vector en la misma dirección y sentido que el vector normal, es muy útil para determinar del vector normal de curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

Ejemplo 17. Vamos a determinar el vector normal en $(-1,0,0)$ a la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t)=\left(\frac{t^2-1}{1+t^2},t\frac{1-t^2}{1+t^2},t\right).$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) &= (-1,0,0)\,, \\
\mathbf{x}'(0) &= (0,1,1)\,, \\
\mathbf{x}''(0) &= (4,0,0)\,,
\end{aligned}$$

tenemos que determinar

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \left(\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)\right)\times\mathbf{x}'(0) \\
&= \left((0,1,1)\times(4,0,0)\right)\times(0,1,1) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}\times(0,1,1) = (0,4,-4)\times(0,1,1) \\
&= (8,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Este vector tiene la misma dirección y sentido que el vector normal, que va a ser

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &= \frac{(8,0,0)}{\|(8,0,0)\|} \\
&= (1,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Para curvas planas, cerca de un punto aproximamos a la curva por la recta tangente y por la circunferencia osculadora. En el espacio podemos considerar además el plano en el que localmente se puede considerar a la curva contenida en él. Partimos de una curva parametrizada por el arco y de un punto $\mathbf{x}(s_0)$ en ella. Además, pedimos que este punto sea regular y que el vector normal no sea nulo, es decir, pedimos $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{x}'(s_0) \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{x}''(s_0) \neq \mathbf{0}$.

Para determinar el plano que mejor se ajusta a la curva en este punto hacemos lo mismo que para determinar la circunferencia osculadora: consideramos tres puntos de la curva (el punto $\mathbf{x}(s_0)$ en cuestión y otros dos puntos) de tal forma que estén no alineados con él y determinamos el plano que los ser linealmente independientes. Se tiene que los vectores tangente $\mathbf{t}(s_0)$ y normal $\mathbf{n}(s_0)$ son perpendiculares a cualquier vector director de este plano (la demostración está en el documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés, versión de enero 2014, página 77). Esto significa que el vector $\mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$, que es perpendicular a los vectores tangente y normal a la curva en $\mathbf{x}(s_0)$, es perpendicular a su vez cualquier vector incluido en el plano. Pero cualquier vector incluido en el plano toma la forma $\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)$, si $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es un punto del plano cualquiera. Por eso, la ecuación del plano osculador es:

$$(\mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) = 0.$$

Esta condición es equivalente a decir que

$$\det(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) = 0.$$

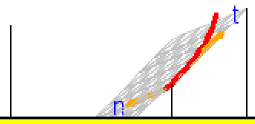
Podemos llegar a otra expresión de esta ecuación, si tenemos en cuenta que $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$ sean perpendiculares a cualquier vector director del plano significa que el espacio lineal generado por estos vectores, que denotamos como

$$L(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right),$$

coincide con el plano vectorial asociado al plano osculador. En ese caso, podemos escribir la ecuación del plano osculador como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s_0) + L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right).$$

En la siguiente figura, se representa el plano osculador:



Señalamos que el plano vectorial asociado al plano osculador es un plano paralelo al plano osculador y que pasa por el origen de coordenadas y que no coincide, en general, con el plano osculador, que no pasa necesariamente por el origen de coordenadas. Ambos planos están generados por los vectores $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$. Abusando de la notación, llamaremos a ambos plano osculador y por el contexto se distinguirá a cuál nos referimos.

Si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, sabemos que los vectores $\mathbf{x}'(s)$ y $\mathbf{x}'(t)$ tienen la misma dirección. Pero además, el espacio lineal (plano, en este caso) generado por $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ es el mismo que el generado por $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$, porque

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha\frac{d\mathbf{x}}{ds} + \beta\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \\
&= \alpha\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds} + \beta\left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\
&= \left(\alpha\frac{dt}{ds} + \beta\frac{d^2t}{ds^2}\right)\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \beta\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right) \\
&= \alpha'\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \beta'\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2},
\end{aligned}$$

y el recíproco se demuestra igual. por eso, si la curva no está parametrizada por el arco el plano osculador es el plano dado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + L\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)$$

o por

$$\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t), \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t), \mathbf{x} - \mathbf{x}(t)\right) = 0.$$

Ejemplo 18. Sea C la curva dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, t\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\right).$$

Vamos a determinar su plano osculador en el punto $\mathbf{x}(0) = (-1, 0, 0)$.

Sabemos, por ejemplos anteriores, que

Entonces, para $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (-1, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1), \\ \mathbf{x}''(0) &= (4, 0, 0). \end{aligned}$$

Un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), (x, y, z) - (-1, 0, 0)) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ x+1 & y & z \end{vmatrix} = -4z + 4y. \end{aligned}$$

Por eso, la ecuación del plano osculador en $(-1, 0, 0)$ es:

$$y = z.$$

■

Como propiedad, señalamos que si la curva está contenida en un plano, entonces el plano osculador en cualquier punto es el plano que contiene a la curva. Por otro lado, si la torsión no se anula en $\mathbf{x}(t_0)$, entonces la curva atraviesa al plano osculador.

Ejemplo 19. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y, x - z = -2$. Vamos a determinar la ecuación de su plano osculador en el punto $(1, 2, 3)$.

Es una curva plana (está contenida en el plano $x - z = -2$), y por eso, su plano osculador es este mismo plano: $x - z = -2$. ■

Para curvas en el espacio también se puede definir la circunferencia osculadora como aquella que más se ajusta a la curva cerca de un punto. Esta circunferencia está contenida en el plano osculador y su centro, el **centro de curvatura**, se encuentra en la dirección del vector normal, y en su mismo sentido. Está a una distancia R del punto $\mathbf{x}(t_0)$ y este valor es su radio, el **radio de curvatura**. Es la cantidad inversa de la curvatura en el punto:

Vamos a determinar el radio de curvatura y el centro de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$.

El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k. Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}'(t) = \left(2t, 1, 3t^2\right), \quad \mathbf{x}''(t) = (2,0,6t), \\
\mathbf{x}'(0) = (0,1,0), \quad \mathbf{x}''(t) = (2,0,0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 1, \\
\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 2.
\end{gathered}$$

Entonces la curvatura es:

$$k(0) = \frac{2}{1^3} = 2,$$

y el radio de curvatura es

$$R(0) = \frac{1}{2}.$$

Vamos a determinar ahora el vector normal, que sabemos que tiene la misma dirección y sentido que:

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((0,1,0) \times (2,0,0)) \times (0,1,0) = (0,0,-2) \times (0,1,0) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,0,0).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(2,0,0)}{\|(2,0,0)\|} = (1,0,0).$$

El cento de curvatura está a una distancia $\frac{1}{2}$ del punto $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$

3. Vector binormal. Fórmulas de Frenet.

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.5. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

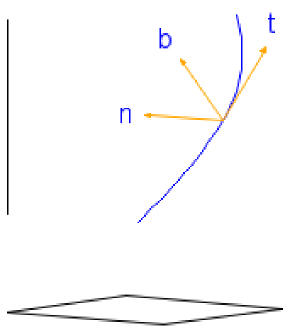
Vimos que una ecuación del plano osculador es

$$(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) = 0.$$

Por tanto, la variación del plano osculador también está dada por la variación del vector $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. Este vector se llama vector binormal y se denota:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

En la siguiente figura se representan estos tres vectores:



Este vector es perpendicular al plano osculador, generado por $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$. Este plano, como vimos, es el mismo que el generado por $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$, entonces si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, el vector binormal tiene la misma dirección que el vector

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t).$$

Vamos a determinar el vector binormal en el punto $(1,0,0)$.

Solución: Sabemos que

$$(1,0,0)=\mathbf{x}(0)\,\text{-}$$

Por eso, calculamos:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}'(t)=\left(e^t,2t-1,\cos t\right), & \mathbf{x}''(t)=\left(e^t,2,-\operatorname{sen} t\right), \\ \mathbf{x}'(0)=(1,-1,1), & \mathbf{x}''(0)=(1,2,0). \end{array}$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector binormal es:

$$\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

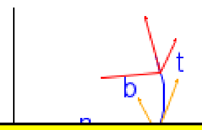
El vector binormal es unitario, por lo que es

$$\mathbf{b}(0)=\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}(-2,1,3)=\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,1,3).$$

Hasta ahora, en cada punto $\mathbf{x}$ de la curva, tenemos tres vectores unitarios, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$, que además, son ortogonales dos a dos y por eso, linealmente independientes.Estos tres vectores son una base local para cada punto de la curva, y van variando con ella. Se llaman triedro de Frenet

$$F=\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}.$$

En la siguiente figura se han representado los triedros de Frenet para dos puntos distintos de la curva:



Ejemplo 22. Sea la curva de ecuaciones

$$x = t^2, y = t^2 + t, z = t - 1, t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a determinar el triedro de Frenet en el punto $(1, 2, 0)$.

Solución: El punto $(1, 2, 0)$ es la imagen de $t = 1$. La parametrización

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t^2 + t, t - 1\right)$$

es regular y

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}'(t) = (2t, 2t + 1, 1), & \mathbf{x}''(t) = (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}'(1) = (2, 3, 1), & \mathbf{x}''(1) = (2, 2, 0). \end{array}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1) = ((2, 3, 1) \times (2, 2, 0)) \times (2, 3, 1) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (2, 3, 1) = (-2, 2, -2) \times (2, 3, 1) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (8, -2, -10). \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(8, -2, -10)}{\sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-10)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{42}} (8, -2, -10) = \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5).$$

El vector tangente unitario a la curva en $(1, 2, 0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1) \times \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5) = \frac{1}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{42} (-14, 14, -14) = \frac{\sqrt{3}}{3} (-1, 1, -1). \end{aligned}$$

Para estudiar cómo varían el vector binormal, es mejor estudiar la variación del **triedro de Frenet**. Conocemos la primera de las fórmulas de Frenet para curvas parametrizadas por la longitud de arco, que relaciona los vectores tangentes y normal

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s).$$

Vamos a extender esta relación a las curvas espaciales. Si escribimos el triedro de Frenet en forma matricial, y derivamos esta matriz, tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{t}}{ds} & \frac{d\mathbf{n}}{ds} & \frac{d\mathbf{b}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \iff F' = FA$$

para una matriz A, que es antisimétrica, es decir,

$$A^t = -A;$$

La demostración está en el documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés, versión de enero 2014. Entonces, teniendo en cuenta esta hecho y la primera fórmula de Frenet, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la definición de la matriz A, sabemos que debe cumplirse

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = a_{23}\mathbf{n}(s).$$

Entonces, a_{23} es justamente la variación del vector normal. Llamamos **torsión** a esta variación, lo denotamos como $\tau(s)$ y se cumple

$$\tau(s) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n}(s).$$

La idea intuitiva de la torsión es la siguiente: como indica cuánto cambia el vector binormal, indica cuánto cambia el vector perpendicular a los vectores tangente y normal. Por eso, no dice cuánto se retuerce, en el espacio, la curva.

A partir de esta expresión, tenemos A y podemos escribir un sistema de ecuaciones diferenciales, que son las fórmulas de Frenet

Para $k(s) > 0$ y $\kappa(s)$ arbitrarias, existe una única curva diferenciable, salvo movimientos en el plano, para la $k(s)$ y $\kappa(s)$ son la curvatura y la torsión.

Ejemplo 23. La curva C está dada por $\mathbf{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tiene curvatura y torsión dadas por $k(t)$, $\tau(t)$ en cada punto $\mathbf{x}(t)$. Vamos a ver qué ocurre con $k(t)$ y $\tau(t)$ si recorremos la curva en sentido contrario.

Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que están recorridas por el arco. Recorrer la curva en sentido contrario es lo mismo que dar la curva por la aplicación

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(f(s))$$

donde $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ está dada por $f(s) = -s + b + a$. Si llamamos $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}_1(s)$ a los vectores tangentes a la curva C, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{n}_1(s)$ a los vectores normales y $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{b}_1(s)$ a los vectores binomales, y $k(s), k_1(s)$ y $\tau(s), \tau_1(s)$ a las curvaturas y torsiones respectivas pero recorrida según $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1(s) &= \mathbf{y}'(s) = \mathbf{x}'(f(s))\, f'(s) = -\mathbf{t}(s), \\
\mathbf{y}''(s) &= \mathbf{x}''(f(s))\,(f'(s))^2 + \mathbf{x}'(f(s))\, f''(s) = \mathbf{x}''(f(s)), \\
\mathbf{n}_1(s) &= \frac{\mathbf{y}''(s)}{\|\mathbf{y}''(s)\|} = \frac{\mathbf{x}''(f(s))}{\|\mathbf{x}''(f(s))\|} = \mathbf{n}(s).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce:

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(f(s))\| = \|\mathbf{y}''(s)\| = k_1(s),$$

es decir, la curvatura no cambia.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (-\mathbf{t}_1) \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{b}_1, \\
\frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = -\tau_1(s)\,\mathbf{n}_1(s) = -\tau_1(s)\,\mathbf{n}(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que las torsiones de ambas curvas son opuestas. ■

La demostración no es complicada:

$$\begin{aligned}
\tau(s) &= \frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{n} = \frac{d}{ds}\left(\mathbf{x}'\times\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\\
&= \left(\frac{d}{ds}\mathbf{x}'\times\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}+\mathbf{x}'\times\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\\
&= \left(\mathbf{x}''\times\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}+\left(\mathbf{x}'\times\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\\
&= 0+\left(\mathbf{x}'\times\left(\frac{\mathbf{x}'''}{\|\mathbf{x}''\|}-\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|^2}\frac{d}{ds}\left(\|\mathbf{x}''\|\right)\right)\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\\
&= \left(\mathbf{x}'\times\frac{\mathbf{x}'''}{\|\mathbf{x}''\|}\right)\cdot\frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|}\\
&= \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2}\left(\mathbf{x}'\times\mathbf{x}'''\right)\cdot\mathbf{x}'' = \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2}\mathbf{x}''\cdot\left(\mathbf{x}'\times\mathbf{x}'''\right)\\
&= \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2}\det\left(\mathbf{x}'',\mathbf{x}',\mathbf{x}'''\right) = -\frac{\det\left(\mathbf{x}'(s),\mathbf{x}''(s),\mathbf{x}'''(s)\right)}{k(s)^2}.
\end{aligned}$$

Hemos utilizado las propiedades del producto vectorial, que el producto vectorial de dos vectores con la misma dirección es 0 y que el producto escaldar de dos vectores ortogonales es 0.

Si C es una curva con una parametrización arbitraria $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, y $\mathbf{x}$ es tres veces derivable, la torsión en un punto $\mathbf{x}(t)$ está dada por

$$\tau(t) = -\frac{\det\left(\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}''(t),\mathbf{x}'''(t)\right)}{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Ejemplo 24. Vamos a encontrar la torsión de la curva dada por las ecuaciones

$$x=\cos t, y=t^3+1, z=t-1, t\in\mathbb{R},$$

para un punto genérico y para $t=0$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, 3t^2, 1), \quad \mathbf{x}'(0)=(0,0,1),\\
\mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, 6t, 0), \quad \mathbf{x}''(0)=(-1,0,0),
\end{aligned}$$

Entonces, la torsión es:

$$\tau(t) = \frac{\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)\right)}{\left\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\right\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & 3t^2 & 1 \\ \cos t & 6t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(6\cos t + 6t \operatorname{sen} t)^2}}$$
$$= \frac{6\cos t + 6t\operatorname{sen} t}{6\sqrt{(\cos t + t\operatorname{sen} t)^2}} = \frac{\cos t + t\operatorname{sen} t}{\sqrt{(\cos t + t\operatorname{sen} t)^2}}.$$

Para $t = 0$, tenemos:

$$\tau(0) = \frac{\cos 0 + 0\operatorname{sen} 0}{\sqrt{(\cos 0 + 0\operatorname{sen} 0)^2}} = 1.$$

■

A partir de la expresión de τ, observamos que si la curva es plana, podemos hacer un giro que la transforme en una curva donde su componente z sea 0. en ese caso, la tercera componente de $\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)$ va a ser también 0 y:

$$\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)\right) = 0.$$

Entonces, la torsión es 0. El recíproco también es cierto.

4. Forma canónica local de una curva

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.6. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Partimos de una curva espacial parametrizada por la longitud de arco, dada por $\mathbf{x}(s) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de tal forma que esta función es al menos 4 veces diferenciable. Si quisiérmos aproximar a la curva por el desarrollo de Taylor cerca de un punto $\mathbf{x}(s_0)$, esta aproximación sería de la forma

$$\mathbf{x}(s) \sim \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{x}'''(s_0)(s - s_0)^3. \quad (1)$$

Es decir, como ya sabemos, el desarrollo de Taylor nos da la expresión polinomial de grado 3 que más se ajusta a la curva cerca de $\mathbf{x}(s_0)$. Observamos que en esta expresión aparecen las derivadas $\mathbf{x}^{i)}(s)$ hasta orden 3 de $\mathbf{x}(s)$. Como son vectores, se pueden a partir del triedro de Frenet

$$\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}.$$

Sabemos que

$$\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{t}(s_0).$$

A partir de esta expresión, utilizando las fórmulas de Frenet, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}''(s_0) &= \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s_0)) = k(s_0)\,\mathbf{n}(s_0), \\
\mathbf{x}'''(s_0) &= \frac{d}{ds}(k(s_0)\,\mathbf{n}(s_0)) = \frac{d}{ds}(k(s_0))\,\mathbf{n}(s_0) + k(s_0)\frac{d}{ds}(\mathbf{n}(s_0)) \\
&= k'(s_0)\,\mathbf{n}(s_0) + k(s_0)\left(-k(s_0)\,\mathbf{t}(s_0) - \tau(s_0)\,\mathbf{b}(s_0)\right) \\
&= -k^2(s_0)\,\mathbf{t}(s_0) + k'(s_0)\,\mathbf{n}(s_0) - k(s_0)\,\tau(s_0)\,\mathbf{b}(s_0).
\end{aligned}$$

Si la base tiene el origen en $\mathbf{x}(s_0)$ y los vectores son el triedro de Frenet, sustituyendo estas igualdades en la aproximación por el desarrollo de Taylor 1, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0) &= \mathbf{x}'(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(s_0)(s-s_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{x}'''(s_0)(s-s_0)^3 \\
&\quad + \mathbf{R}(s) \\
&= \mathbf{t}(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2!}k(s_0)\,\mathbf{n}(s_0)(s-s_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\Big(-k(s_0)^2\,\mathbf{t}(s_0) + k'(s_0)\,\mathbf{n}(s_0) - k(s_0)\,\tau(s_0)\,\mathbf{b}(s_0)\Big)(s-s_0)^3 \\
&\quad + \mathbf{R}(s).
\end{aligned}$$

Considerando las tres componentes en base al triedro de Frenet, tenemos

$$x(s) = (s-s_0) - \frac{k(s_0)^2}{6}(s-s_0)^3 + R_1,$$

Es habitual simplificar y suponer $s_0 = 0$, siendo estas ecuaciones

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k(0)^2}{6} s^3 + R_1, \\ y(s) &= \frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 + R_2, \\ z(s) &= -\frac{k(0)\,\tau(0)}{6} s^3 + R_3. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se llaman forma canónica local de la **curva**. Y observamos, a semejanza de lo que ocurría para curvas planas, que está aproximación de la curva está dada por la curvatura y la torsión, salvo movimientos en el plano.

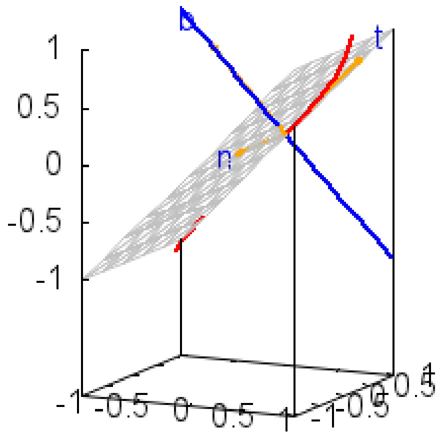
Si la curva es infinitamente diferenciable y se puede determinar por el desarrollo de Taylor, podemos añadir más términos, que dependen de la curvatura, la torsión y sus derivadas.

Con esta referencia, si $\mathbf{t}(t_0)$ juega el papel del vector $(1,0,0)$, $\mathbf{n}(t_0)$ es el equivalente a $(0,1,0)$ y $\mathbf{b}(t_0)$ es $(0,0,1)$, entonces plano xy, determinado por los vectores tangente y normal se llama plano osculador. Como ya vimos, es perpendicular al vector $\mathbf{b}$ y pasa por $\mathbf{x}(s_0)$ y su ecuación es:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0.$$

Se representa en la siguiente gráfica, junto con la **recta binormal**,con la dirección del vector binormal y que pasa por $\mathbf{x}(s_0)$, por lo que su ecuación es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t\mathbf{b}(t_0).$$



Ejemplo 25. Vamos a determinar las ecuaciones de la recta binormal y del plano osculador a la curva de ecuación $\mathbf{x} : (-2, 2) \to \mathbb{R}^3$ en el punto $(0, -1, 1)$, para $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t, t)$.

Sabemos que

$$\mathbf{x}(1) = (0, -1, 1)\,.$$

Tenemos pues, que considerar, $t_0 = 1$.La ecuación del plano osculador es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}\,(t_0)) \cdot \mathbf{b}\,(t_0) = 0$$

Como el vector

$$\mathbf{x}'(t) = (\pi \cos \pi t, -\pi \operatorname{sen} \pi t, 1),$$

la misma dirección y sentido que el vector tangente, y además, $\mathbf{x}'(1) = (-\pi, 0, 1)$, entonces la ecuación del plano tangente es

$$(\mathbf{x} - (0, -1, 1)) \cdot (-\pi, 0, 1) = 0, \text{ o}$$
$$z - 1 = 0.$$

El vector binormal es: $(1, 0, \pi)$, porque

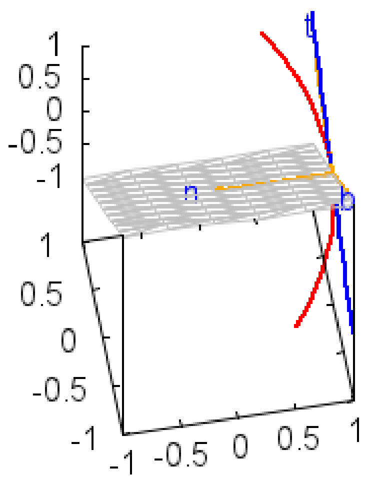
$$\mathbf{x}''(t) = (-\pi^2 \operatorname{sen} \pi t, -\pi^2 \cos \pi t, 0), \ \mathbf{x}''(1) = (0, \pi^2, 0)$$

o lo que es equivalente la del vector $(-\pi^2, 0, -\pi^3)$, luego es la dirección de $(1, 0, \pi)$. Entonces la ecuación de la recta binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}(s_0) + t\mathbf{b}(s_0) \\ &= (0, -1, 1) + \lambda(1, 0, \pi).\end{aligned}$$

■

El plano yz, dado por los vectores normal y binormal, se llama **plano normal**. La recta perpendicular a él, con la dirección del vector tangente y por $\mathbf{x}(t_0)$, se llama **recta tangente**. Se representan en la siguiente gráfica



La curva atraviesa al plano normal siempre, porque la tangente, que marca en qué dirección se "mueve" la curva, es perpendicular a él. La ecuación del plano normal es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) = 0,$$

porque es perpendicular al vector tangente. La ecuación de la recta tangente es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t\mathbf{t}(t_0).$$

Ejemplo 26. Vamos a determinar el plano normal a la hélice circular $x =$

el vector tangente unitario es

$$\left(0, -\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\right).$$

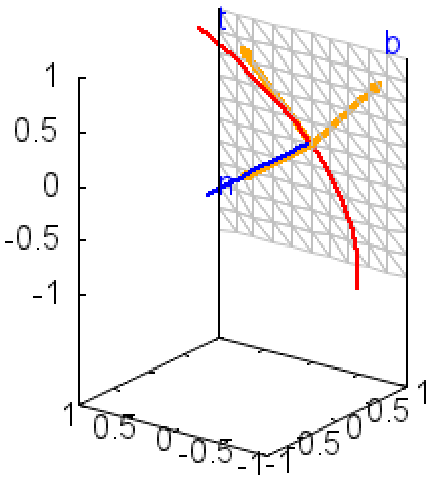
La ecuación del plano normal es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-(-1,0,1))\cdot(0,-\pi,1)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+1,y,z-1)\cdot(0,-\pi,1)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\pi y+z-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad z-\pi y=1.\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=\mathbf{x}(1)+t\mathbf{t}(1)\\ &=(-1,0,1)+t(-\pi\operatorname{sen}\pi\lambda, \pi\cos\pi\lambda, 1).\end{aligned}$$

El plano xz, determinado por los vectores tangente y binormal, es el **plano rectificante**, y la recta perpendicular a él es la **recta normal**, cuya dirección es la del vector normal. Se representa en la siguiente gráfica:



La ecuación del plano rectificante es

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}\left(t_0\right))\cdot\mathbf{n}\left(t_0\right)=0,$$

porque es perpendicular al vector $\mathbf{n}$ y contiene a $\mathbf{x}\left(t_0\right)$. La ecuación de la recta normal es

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\mathbf{x}\left(t_0\right)+t\mathbf{n}\left(t_0\right).$$

Ejemplo 27. Vamos a determinar las ecuaciones de la recta normal y del plano rectificante a la curva de ecuación $\mathbf{x}:(-2,2)\to\mathbb{R}^3$ en el punto $(0,-1,1)$, si $\mathbf{x}(t)=(\operatorname{sen}\pi t,\cos\pi t,t)$.

Por los ejemplos anteriores, sabemos que $t_0=1$, que el vector

$$\mathbf{x}'(1)=(\pi,0,1),$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector tangente, y que el vector binormal es: $(1,0,\pi)$. Por otro lado, el vector normal tiene la misma dirección que el vector

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\left(1\right)\times\mathbf{b}\left(1\right)&=\left(\pi,0,1\right)\times\left(1,0,\pi\right)\\&=\left(0,1-\pi^2,0\right).\end{aligned}$$

Por eso, una ecuación de la recta normal es

$$(x,y,z)=(0,-1,1)+t\left(0,1-\pi^2,0\right)$$

y el plano rectificante está dado por

$$((x,y,z)-(0,-1,1))\cdot\left(0,1-\pi^2,0\right)=0\Longleftrightarrow y+1=0.$$

$\blacksquare$

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

tema 4. Curvas regulares en el espacio. Estudio local y resultados globales.

Ejercicios
Versión 1.1

UNED ETS de Ingenieros Industriales

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

1. Determinar la curva de Bézier cuyo polígono de control es

$$S\left\{(-1,1,0),(0,1,0),(1,-1,-1),(0,1,-1),(0,-1,1)\right\}.$$

Represéntese gráficamente con `Maxima`.

Solución: El polígono de control es

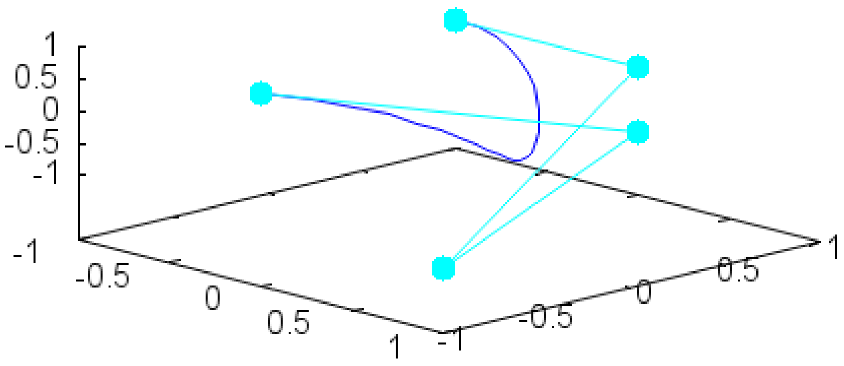
$$\mathbf{b}_0=(-1,1,0),\ \mathbf{b}_1=(0,1,0),\ \mathbf{b}_2=(1,-1,-1),\ \mathbf{b}_3=(0,1,-1),\ \mathbf{b}_4=(0,-1,1).$$

La curva de Bézier está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{4}\mathbf{b}_i B_i^4(t)=\sum_{i=0}^{4}\mathbf{b}_i\begin{pmatrix}4\\ i\end{pmatrix}t^i(1-t)^{4-i}\\
&=(-1,1,0)\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}t^0(1-t)^{4-0}+(0,1,0)\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}t^1(1-t)^{4-1}+\\
&+(1,-1,-1)\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}t^2(1-t)^{4-2}+(0,1,-1)\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}t^3(1-t)^{4-3}+\\
&+(0,-1,1)\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix}t^4(1-t)^{4-4}\\
&=(-1,1,0)(1-t)^4+4(0,1,0)\,t(1-t)^3+6(1,-1,-1)t^2(1-t)^2+\\
&+4(0,1,-1)\,t^3(1-t)+(0,-1,1)\,t^4\\
&=\left(-(-t+1)^4+6t^2(-t+1)^2,-t^4+(-t+1)^4+4t(-t+1)^3+\right.\\
&\left.+4t^3(-t+1)-6t^2(-t+1)^2,t^4-4t^3(-t+1)-6t^2(-t+1)^2\right.\\
&=\left(5t^4-8t^3+4t-1,-14t^4+24t^3-12t^2+1,-t^4+8t^3-6t^2\right)
\end{aligned}$$

Para representar esta curva, se ha escrito en `Maxima` (está hecho en el documento CM-Maxima-Tema4.wxm)

```
-->  load(draw)$
     control:[[-1,1,0],[0,1,0],[1,-1,-1],[0,1,-1],[0,-1,1]];
     longi:5
     B(t,n,i):=binomial(n,i)*(t^i)*(1-t)^(n-i);
     curvabezier(t):=ratsimp
     (sum(B(t,longi-1,i)*control[i+1],i,0,longi-1));
     wxdraw3d
```



2. Escriba la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$ con $t \in [0,1]$ como una curva de Bézier a partir de un polígono de control con 6 puntos. Apóyese en `Maxima` para resolver el sistema que resulta.

   Solución. Si el polígono de control está formado por $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0,\ldots,5} = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0,\ldots,5}$, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 5:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{5} \mathbf{b}_i B_i^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^5(t) + \mathbf{b}_1 B_1^5(t) + \mathbf{b}_2 B_2^5(t) + \mathbf{b}_3 B_3^5(t) + \mathbf{b}_5 B_4^5(t) + \mathbf{b}_5 B_5^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^5 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^4 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^3 \\
&+ \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^2 + \mathbf{b}_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^1 + \mathbf{b}_5 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} t^5 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^5 + 5\mathbf{b}_1 t (1-t)^4 + 10\mathbf{b}_2 t^2 (1-t)^3
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, y desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0)(1-t)^5 \\
&\quad + 5(x_1, y_1, z_1)\, t(1-t)^4 + 10(x_2, y_2, z_2)\, t^2 (1-t)^3 \\
&\quad + 10(x_3, y_3, z_3)\, t^3 (1-t)^2 + 5(x_4, y_4, z_4)\, t^4 (1-t)^1 + (x_5, y_5, z_5)\, t^5 \\
&= \begin{pmatrix} x_0(1-t)^5 + 5tx_1(1-t)^4 + 10t^2x_2(1-t)^3 + 10t^3x_3(1-t)^2 + 5t^4x_4(1-t) + t^5x_5 \\ y_0(1-t)^5 + 5ty_1(1-t)^4 + 10t^2y_2(1-t)^3 + 10t^3y_3(1-t)^2 + 5t^4y_4(1-t) + t^5y_5 \\ z_0(1-t)^5 + 5tz_1(1-t)^4 + 10t^2z_2(1-t)^3 + 10t^3z_3(1-t)^2 + 5t^4z_4(1-t1) + t^5z_5 \end{pmatrix} \\
&= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
\end{aligned}$$

Con ayuda de Maxima, resolvemos los sistemas que resultan. Cada uno de estos sistemas consiste en 6 ecuaciones y 6 incógnitas. Por ejemplo, para determinar x_i tenemos que desarrollar primero:

$$\begin{aligned}
x_0(-t+1)^5 + 5tx_1(-t+1)^4 + 10t^2x_2(-t+1)^3 \\
+ 10t^3x_3(-t+1)^2 + 5t^4x_4(-t+1) + t^5x_5
\end{aligned}$$

y luego igualar coeficientes con $t^3 - 2t + 1$ y resolver. Sin embargo, con Maxima basta hacer (véase el documento CM-Maxima-Tema4.wxm):

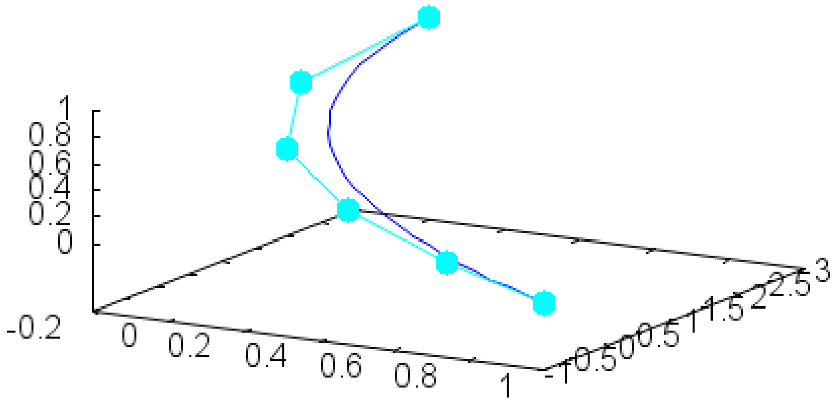
```
--> curva(t):=x0*(-t+1)^5+5*x1*t*(-t+1)^4+10*(t^2)*x2*(-t+1)^3
    +10*(t^3)*x3*(-t+1)^2+5*(t^4)*x4*(1-t)+(t^5)*x5;
    componente(t):=t^3-2*t+1;
    aa:expand(curva(t)-componente(t));
    ec0:coeff(aa,t,0); ec1:coeff(aa,t,1);
    ec2:coeff(aa,t,2);
    ec3:coeff(aa,t,3);
    ec4:coeff(aa,t,4);
    ec5:coeff(aa,t,5);
    linsolve([ec0,ec1,ec2,ec3,ec4,ec5],[x0,x1,x2,x3,x4,x5]);
```

De forma similar se procede con las otras componetnes e los vértices del polígono de control y se obtiene el siguiente polígono de control:

$$(1, -1, 0), \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}\right), \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{5}, \frac{3}{10}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right), (0, 3, 1).$$

```
->  kill(all)$
    load(draw)$
    curvabezier(t):=[t^3-2*t+1,4*t-1,t^2];
    control:[[1,-1,0],[3/5,-1/5,0],[1/5,3/5,1/10],[-1/10,7/5,3/10],
    [-1/5,11/5,3/5],[0,3,1]];
    wxdraw3d
    (parametric(curvabezier(t)[1],curvabezier(t)[2],curvabezier(t)[3],t,0,1),
    point_type=filled_circle, point_size=2,
    color=cyan,points_joined=true,points(control));
```

Resulta:



3. Determínese el polígono de control de la curva de Bézier de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$$

con $t \in [0,1]$, pero cuando este polígono tiene 5 puntos. Este ejemplo se hizo para un polígono de control de 4 puntos en los apuntes.

de Bernstein de grado 4:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) + \mathbf{b}_4 B_4^4(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^3 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^2 \\
&+ \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^1 + \mathbf{b}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 4t^1 (1-t)^3 + \mathbf{b}_2 6t^2 (1-t)^2 + \mathbf{b}_3 4t^3 (1-t)^1 + \mathbf{b}_4 t^4.
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0)(1-t)^4 + 4(x_1, y_1, z_1) t^1 (1-t)^3 + 6(x_2, y_2, z_2) t^2 (1-t)^2 \\
&+ 4(x_3, y_3, z_3) t^3 (1-t)^1 + (x_4, y_4, z_4) t^4 \\
&= \begin{pmatrix} (1-t)^4 x_0 + 4(1-t)^3 t x_1 + 6(1-t)^2 t^2 x_2 + 4(1-t) t^3 x_3 + t^4 x_4 \\ (1-t)^4 y_0 + 4(1-t)^3 t y_1 + 6(1-t)^2 t^2 y_2 + 4(1-t) t^3 y_3 + t^4 y_4 \\ (1-t)^4 z_0 + 4(1-t)^3 t z_1 + 6(1-t)^2 t^2 z_2 + 4(1-t) t^3 z_3 + t^4 z_4 \end{pmatrix}^t
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_0 + (-4x_0 + 4x_1) t + (6x_0 - 12x_1 + 6x_2) t^2 + (-4x_0 + 12x_1 - 12x_2 + 4x_3) t^3 + (x_0 - 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4) t^4 \\ y_0 + (-4y_0 + 4y_1) t + (6y_0 - 12y_1 + 6y_2) t^2 + (-4y_0 + 12y_1 - 12y_2 + 4y_3) t^3 + (y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y) t^4 \\ z_0 + (-4z_0 + 4z_1) t + (6zx_0 - 12z_1 + 6zx_2) t^2 + (-4z_0 + 12z_1 - 12z_2 + 4z_3) t^3 + (z_0 - 4z_1 + 6z_2 - 4z_3 + z_4) t^4 \end{pmatrix}^t
$$

$$
= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
$$

Resolvemos con ayuda de `Maxima` el sistema y tenemos:

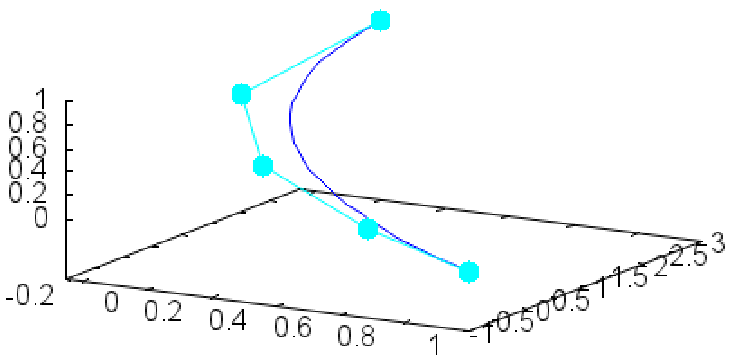
$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0, \\
y_0 &= -1, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, \\
z_0 &= 0, z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{6}, z_3 = \frac{1}{2}, z_4 = 1.
\end{aligned}
$$

Los puntos son:

$$
(1, -1, 0), \ \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \ \left(0, 1, \frac{1}{6}\right), \ \left(-\frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}\right), \ (0, 3, 1).
$$

Entonces, la curva se puede escribir como:

$$
\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2) = \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) + \mathbf{b}_4 B_4^4(t)
$$



4. Sea C la la curva dada por

$$x = t^3 - t, y = t^5 - t, z = \operatorname{sen}^2 \pi t.$$

para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Estudiar si es una curva regular y si $(0,0,0)$ es un punto múltiple.

Solución: La curva es regular si no tiene puntos singulares, es decir, puntos donde el vector derivada sea $(0,0,0)$. Como el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(3t^2 - 1, 5t^4 - 1, 2 \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\right),$$

este vector se anula y y sólo si

$$\begin{aligned} 3t^2 - 1 &= 0, \\ 5t^4 - 1 &= 0, \\ 2 \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t &= 0. \end{aligned}$$

Esto no ocurre simultáneamente para ningún valor de t, por tanto, es una curva regular.

Para que sea $(0,0,0)$ sea punto múltiple debe ser

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

5. Hallar la recta tangente a la hélice circular $x = \cos \pi t, y = \operatorname{sen} \pi t, z = t$ en el punto correspondiente a $z = 1$.

   Solución: El punto $z = 1$ corresponde a $t = 1$ y a $x = \cos \pi = -1, y = \operatorname{sen} \pi = 0$. El punto será $(-1, 0, 1)$. Un vector director de la recta tangente es el vector derivada en ese punto. Como

$$\mathbf{x}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t),$$
$$\mathbf{x}'(t) = (-\pi \operatorname{sen} \pi t, \pi \cos \pi t, t),$$

   en $t = 1$ este vector es

$$(0, -\pi, 1).$$

   Por eso, la recta tangente tiene por ecuaciones

$$x = -1 + 0\lambda,\ y = 0 - \pi\lambda,\ z = 1 + \lambda,$$

   o

$$x = -1, z = 1 - \frac{y}{\pi}.$$

6. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, 4t, t^3)$$

   Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

   Solución: Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

   Para esta curva, tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2t, 4, 3t^2\right), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 0, 6t),$$
$$\mathbf{x}'(0) = (0, 4, 0), \quad \mathbf{x}''(0) = (2, 0, 0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 4,$$
$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 8.$$

   Entonces la curvatura en $(0, 0, 0)$ es

7. Encontrar la curvatura y el vector normal de la parametrización $\mathbf{x}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(t) = (t, 2t^2, t^2)$.

Solución: Comenzamos con la curvatura k,

Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 4t, 2t), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 4, 2),$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{1 + (4t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 20t^2}$$

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4t & 2t \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2j + 4k,$$

$$\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Entonces

$$k(t) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 20t^2}^3}.$$

El vector normal tiene la misma dirección y sentido que el vector

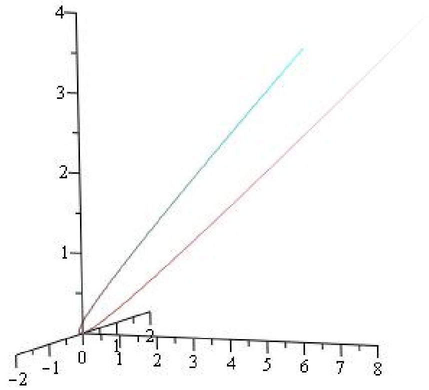
$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) &= ((1, 4t, 2t) \times (0, 4, 2)) \times (1, 4t, 2t) \\ &= (0, -2, 4) \times (1, 4t, 2t) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4t & 2t \end{vmatrix} = (-20t, 4, 2). \end{aligned}$$

Como debe ser unitario, el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(-20t, 4, 2)}{\|(-20t, 4, 2)\|}$$



8. Sea C la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)\,.$$

Vamos a determinar su plano osculador en el punto $\mathbf{x}(0) = (a, 0, 0)$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b)\,, \\ \mathbf{x}''(t) &= (-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0)\,. \end{aligned}$$

Entonces, para $t = 0$, se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (a, 0, 0)\,, \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, a, b)\,, \\ \mathbf{x}''(0) &= (-a, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

Un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$0 = \det\left(\mathbf{x}'(0)\,, \mathbf{x}''(0)\,, (x, y, z) - (a, 0, 0)\right)$$

9. Determínese el centro de curvatura de la curva dada por las ecuaciones $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, $z = \theta$ en $z = \pi$.

   Solución. Es el punto $(1, 0, \pi)$.

   Hay que determinar lel vector normal y el radio de curvatura. Sabemos que el vector
$$(\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta)) \times \mathbf{x}'(\theta)$$
   tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal. Por eso, hacemos:
$$\mathbf{x}'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1),\ \ \mathbf{x}''(\theta) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0),$$
$$\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi) = (0, -1, 1) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 1),$$
$$(\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi)) \times \mathbf{x}'(\pi) = (0, 1, 1) \times (0, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, 0).$$

   Por eso, el vector normal en el punto correspondiente a $\theta = \pi$ es
$$\mathbf{n}(\pi) = (1, 0, 0).$$

   Como la curvatura en un punto genérico está dada por
$$k(t_0) = \frac{\|\mathbf{x}'(t_0) \times \mathbf{x}''(t_0)\|}{\|\mathbf{x}'(t_0)\|^3},$$
   en este caso tenemos:
$$k(\pi) = \frac{\|\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi)\|}{\|\mathbf{x}'(\pi)\|^3} = \frac{\|(0, -1, 1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{2}.$$

   el radio de curvatura en el punto $\mathbf{x}(\pi) = (-1, 0, \pi)$ es $R(\pi) = 2$. El centro de curvatura es, por tanto:
$$\mathbf{c} = \mathbf{x}(\pi) + R(\pi)\mathbf{n}(\pi) = (-1, 0, \pi) + 2(1, 0, 0) = (1, 0, \pi).$$

a) $(-1, 0, \pi/2)$.

b) $(-\pi, 0, \pi)$.

c) $(1, 0, \pi)$.

d) $(1, 1, 1)$.

e) $(0, -1, 1)$.

f) $(-1, \pi, \pi)$.

g) $(\pi, 1, \pi)$.

h) $(1, 0, 1)$.

i) $(1, -1, 1)$.

j) Ninguno de ellos.

Solución. Es correcta la opción c). Lo comprobamos, haciendo

$$\mathbf{x}'(t) = (\pi \cos \pi t, -\pi \operatorname{sen} \pi t, 1),$$
$$\mathbf{x}''(t) = (-\pi^2 \operatorname{sen} \pi t, -\pi^2 \cos \pi t, 0).$$

Como

$$(0, -1, 1) = \mathbf{x}\,(1)\,,$$

en este punto se tiene

$$\mathbf{x}'(1) = (-\pi, 0, 1), \quad \mathbf{x}''(1) = (0, \pi^2 0).$$

Por tanto, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\pi & 0 & 1 \\ 0 & \pi^2 & 0 \end{vmatrix} = -\pi^2\mathbf{i} - \pi^3\mathbf{k}$$

o lo que es equivalente la del vector $(-\pi^2, 0, -\pi^3)$, luego es la dirección de $(1, 0, \pi)$.

11. Sea la curva de ecuaciones

Entonces determinamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, 2t, 2)\,, & \mathbf{x}''(t) &= (\cos t, 2, 0)\,, \\ \mathbf{x}'(0) &= (0,0,2)\,, & \mathbf{x}''(0) &= (1,2,0)\,. \end{aligned}$$

La curva no está parametrizada por la longitud de arco y entonces, tenemos el vector tangente a la curva es:

$$\mathbf{t}(0) = \frac{1}{\|(0,0,2)\|}(0,0,2) = (0,0,1)\,.$$

Además, sabemos que

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0,0,2) \times (1,2,0)) \times (0,0,2) = (4,8,0)$$

tiene la misma dirección sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(4,8,0)}{\sqrt{4^2+8^2}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}(4,8,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)\,.$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= (0,0,1) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1) \times (1,2,0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)\,. \end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{(0,0,1)\,, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)\,, \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)\right\}.$$

12. Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)\,.$$

a) ¿Cuál es el triedro de Frenet en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$? ¿Cuál *a*) Tenemos que calcular

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,, \quad \mathbf{x}''(t) = (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)\,.$$

El vector $\mathbf{v}$ dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) \\
&= ((-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \times (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)) \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \\
&= \left(ab\,\mathrm{sen}\,t, -ab\cos t, a^2\right) \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ ab\,\mathrm{sen}\,t & -ab\cos t & a^2 \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \end{vmatrix} \\
&= \left(-\left(a^3 + ab^2\right)\cos t, -\left(a^3 + ab^2\right)\,\mathrm{sen}\,t, 0\right)\,,
\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$. Por eso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{\left(-\left(a^3 + ab^2\right)\cos t, -\left(a^3 + ab^2\right)\,\mathrm{sen}\,t, 0\right)}{\sqrt{\left(-\left(a^3 + ab^2\right)\right)^2\cos^2 t + \left(-\left(a^3 + ab^2\right)\right)^2\,\mathrm{sen}^2 t}} \\
&= \frac{1}{\left(a^3 + ab^2\right)}\left(-\left(a^3 + ab^2\right)\cos t, -\left(a^3 + ab^2\right)\,\mathrm{sen}\,t, 0\right) \\
&= (-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t, 0)\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, el vector tangente unitario a la curva en $(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)}{\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,.$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \times (\cos t, \,\mathrm{sen}\,t, 0)$$

El triedro de Frenet es:

$$\left\{\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b\right), \mathbf{n} = \left(-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t, 0\right),\right.$$
$$\left.\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\,\mathrm{sen}\,t, -b\cos t, a\right)\right\}.$$

Para $t = 0$, tenemos

$$\mathbf{t}\left(0\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\,\mathrm{sen}\,0, a\cos 0, b\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, a, b\right),$$
$$\mathbf{n}\left(0\right) = \left(-\cos 0, -\,\mathrm{sen}\,0, 0\right) = \left(-1, 0, 0\right),$$
$$\mathbf{b}\left(0\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\,\mathrm{sen}\,0, -b\cos 0, a\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, -b, a\right).$$

Por eso, el triedro de Frenet es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, a, b\right), \left(-1, 0, 0\right), \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, -b, a\right)\right\}.$$

b) Para calcular la curvatura, hacemos primero:

$$\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\| = \sqrt{\left(-a\,\mathrm{sen}\,t\right)^2 + \left(a\cos t\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\left\|\mathbf{x}''\left(t\right)\right\| = \sqrt{\left(-a\,\mathrm{sen}\,t\right)^2 + \left(-a\cos t\right)^2} = a.$$

Entonces, la curvatura es

$$k\left(t\right) = \frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right) \times \mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^3}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}^3}\left\|\left(ab\,\mathrm{sen}\,t, -ab\cos t, a^2\right)\right\| = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$$
$$= \frac{a}{a^2+b^2},$$

porque

$$\begin{vmatrix} i & j & k \end{vmatrix}$$

c) Sabemos que la torsión es, para una parametrización arbitaria:

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b), \\
\mathbf{x}''(t) &= (-a \cos t, -a \operatorname{sen} t, 0), \\
\mathbf{x}'''(t) &= (a \operatorname{sen} t, -a \cos t, 0), \\
\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \left(ab \operatorname{sen} t, -ab \cos t, a^2\right), \\
\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| &= a\sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)) &= \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} \\
&= a^2 b \operatorname{sen}^2 t + a^2 b \cos^2 t \\
&= a^2 b.
\end{aligned}$$

Y:

$$\tau(t) = -\frac{a^2 b}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

13. Determine la ecuación de la recta normal y del plano normal y osculador a la hélice de ecuaciones $\alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$ en el punto $(2, 0, 0)$.

Solución: El plano normal es el plano perpendicular a la recta tangente y el plano osculador es el plano que pasa por el punto y cuyo vector característico es el binormal, es decir $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Para esta representación, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-2 \operatorname{sen} t, 2\cos t, 1), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-2 \operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2 + 1} = \sqrt{5}, \\
\mathbf{x}''(t) &= (-2\cos t, -2 \operatorname{sen} t, 0),
\end{aligned}$$

Por eso, el vector tangente es

$$\mathbf{t}(0) = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1).$$

El plano normal tiene la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}(0)) = 0 &\iff \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)\cdot(x-2,y,z) = 0\\ &\iff \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z = 0 \iff 2y+z=0.\end{aligned}$$

Un vector en la misma dirección y sentido que el normal es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(0) &= (\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0))\times\mathbf{x}'(0) = ((0,2,1)\times(-2,0,0))\times(0,2,1)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}\times(0,2,1) = (0,-2,4)\times(0,2,1)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = -10i.\end{aligned}$$

El vector normal es $\mathbf{n} = (-1,0,0)$. La ecuación de la recta normal es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = (x,y,z) &= \mathbf{x}(0) + t\mathbf{n}(0) = (2,0,0) + t(-1,0,0)\\ &= (2-\lambda,0,0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\times\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)\times(-1,0,0) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}j + \frac{2}{\sqrt{5}}k = \left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

y la ecuación del plano osculador es

14. Sea la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2+y, x+z = 2$. Determínese b y c para que el vector $(3, b, c)$ pertenezca al plano normal a la curva en el punto $P = (1, 0, 1)$ y forme con el vector $(-1, 0, -1)$ y el vector tangente a la curva en P una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

    Solución: $b = 2, c = -3$.

    Unas ecuaciones paramétricas de la curva se obtienen haciendo $x = u$ y despejando y, z, con lo cual resulta

    $$x = u, y = 2 - u - u^2, z = 2 - u.$$

    El punto dado es la imagen de $u = 1$ por lo tanto $\mathbf{x}(u) = (u, 2 - u - u^2, 2 - u)$ y $\mathbf{x}'(u) = (1, -1 - 2u, -1)$ es el vector tangente y para $u = 1$, tenemos

    $$\mathbf{x}'(1) = (1, -3, -1).$$

    Nótese que $(1, -3, -1) \cdot (-1, 0, -1) = 0$.

    Se trata de encontrar un vector $(3, b, c)$ cuyo producto escalar con $(-1, 0, -1)$ y con $(1, -3, -1)$ sea cero. Entonces

    $$\begin{array}{l} (3, b, c) \cdot (-1, 0, -1) = 0, \\ (3, b, c) \cdot (1, -3, -1) = 0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -3 - c = 0, \\ 3 - 3b - c = 0, \end{array} \Rightarrow c = -3, b = 2.$$

15. Sea la curva de ecuaciones

    $$x = t^2, y = t^2 + 1, z = t - 1, t \in \mathbb{R}.$$

    Determínense las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en el punto $(0, 1, -1)$.

    Solución: El punto $(0, 1, -1)$ es la imagen de $t = 0$. Sabemos (por los apuntes), que el triedro de Frenet en ese punto es

    $$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1) , \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5) , \frac{\sqrt{3}}{3} (-1, 1, -1) \right\}.$$

La ecuación del plano normal es

$$
\begin{aligned}
&0 = ((x, y, z) - (0, 1, -1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1) \iff \\
&0 = 2x + 3y - 2 + z.
\end{aligned}
$$

El plano rectificante tiene por ecuación:

$$
\begin{aligned}
&0 = ((x, y, z) - (0, 1, -1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}(4, -1, -5) \iff \\
&0 = 4x - y - 4 - 5z.
\end{aligned}
$$

Apuntes de Complementos Matemáticos
de la Ingeniería Industrial

Tema 5. Superficies.

Parte I. Teoría y problemas

Versión 1.1

UNED

ETS de Ingenieros Industriales

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

5. Superficies 4
- 5.1. Ejemplos de superficies. Visualización en el ordenador . 4
- 5.2. Superficies de Bézier. Visualización en el ordenador . . 14
- 5.3. Superficies parametrizadas regulares 14
- 5.4. Curvas sobre superficies 17
- 5.5. Primera forma fundamental 24
- 5.6. Segunda forma fundamental 30
- 5.7. Teorema egregio de Gauss 65

5. Superficies

5.1. Ejemplos de superficies. Visualización en el ordenador

Intuitivamente, una superficie es el lugar geométrico por donde se mueve una partícula con dos grados de libertad, u y v. Esto quiere decir que (u,v) le corresponde una posición $\mathbf{x}(u.v)$ o

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)).$$

En general podemos considerar que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es una función continua de conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Pero en esta asignatura vamos a pedir esta función sea diferenciable, en ocasiones más de una vez.

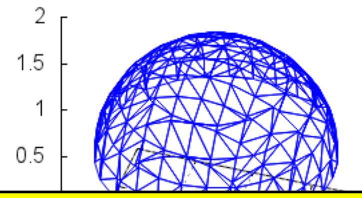
Ejemplo 1. Si llamamos $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, entonces la superficie dada a partir de

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)}\right)$$

es una semiesfera de 1. Esta ecuación se llama paramétrica, porque depende de dos parámetros. La ecuación implícita sería de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

para $x^2 + y^2 < 1$. Se representa en la siguiente figura:



Sweñalamos que en general una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y radio r está dada por las ecuaciones implícitas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

y por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \\ z &= r \cos\varphi, \end{aligned}$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Este ejemplo, justo con gran parte de los que aparecen en este documento, está representado en `CM-tema5-Maxima.wxm`.

Ejemplo 2. El cilindro circular de radio 1 está dado por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 (u, v) &= \left(u, \sqrt{1 - u^2}, v\right), \\ \mathbf{x}_2 (u, v) &= \left(u, -\sqrt{1 - u^2}, v\right). \end{aligned}$$

Es necesario utilizar dos ecuaciones, porque en caso contrario, sólo se cubrirían con una de las dos parametrizaciones, los puntos donde $u \geq 0$ o donde $y \leq 0$. Para representar esta superficie con `Maxima`, tenemos que escribir:

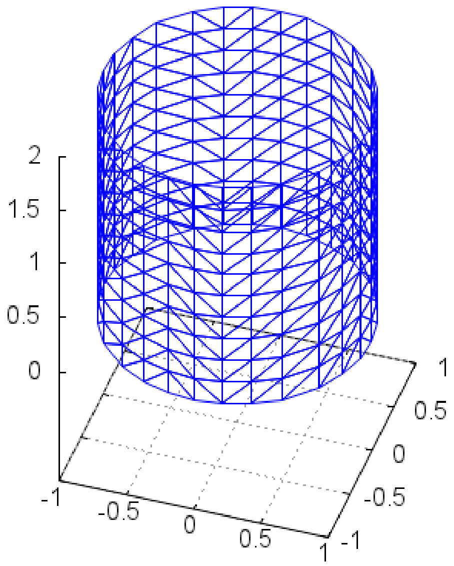
```
->  load(draw)$
    wxdraw3d(proportional_axes='xyz,color=blue,
    user_preamble="set size ratio 1",
    xtics='false,ytics='false,ztics='false,
    parametric_surface(u,(1-u^2)^0.5,v,u,-0.999,0.999,v,-0.999,0.999),
    parametric_surface(u,-(1-u^2)^0.5,v,u,-0.999,0.999,v,-0.999,0.999));
```

La ecuación implícita es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Con Maxima se representa como

```
->  load(draw)$
```



Hemos visto superficies dadas por ecuaciones implícitas o paramétricas. En general, en esta asignatura vamos a trabajar con las ecuaciones paramétricas. Es interesante señalar que no siempre es sencillo pasar de un tipo de ecuación a otra, como vimos al estudiar las curvas. Si en las ecuaciones implícitas, se puede despejar una de las variables en función de las otras, tenemos las ecuaciones paramétricas.

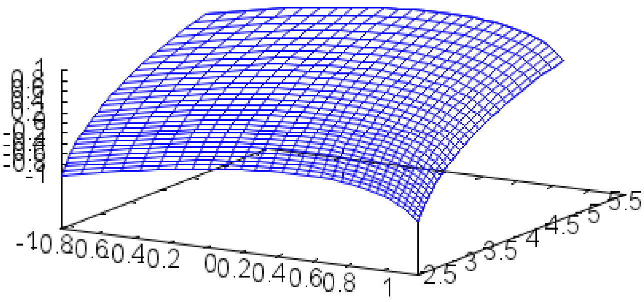
Ejemplo 3. La superficie dada por

$$x^2 + y - e^z = 3$$

tiene una ecuación implícita

$$\mathbf{x}\,(u, v) = \left(u, 3 + e^v - u^2, v\right)$$

porque la variable y cumple:



$\blacksquare$

Sin embargo, para pasar de la ecuación paramétrica a la implícita requiere pensar cómo encontrar una relación entre las variables que intervienen y puede ser más complicado.

Ejemplo 4. Un cono tiene por ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u).$$

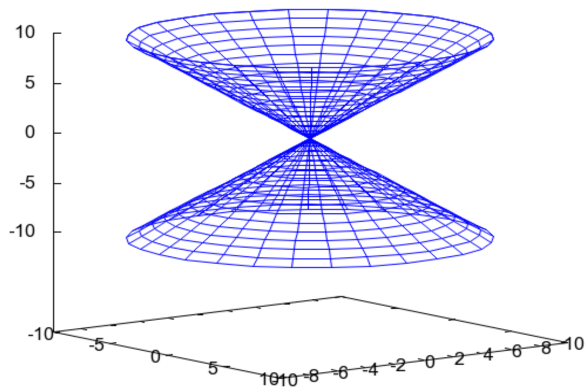
Para obtener las ecuaciones implícitas, debemos observar que en la primera coordenada aparece un parámetro multiplicado por un coseno y en la segunda está multiplicado por el seno, y este parámetro es justo la tercera coordenada. Por eso, podemos hacer

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v$$
$$x^2 + y^2 = u^2 \left(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v\right) = u^2.$$

Pero justo tenemos que $u = z$, y así tenemos las ecuaciones implícitas:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Su gráfica es



$\blacksquare$

Una forma de generar una superficie es a partir de una curva. Si tenemos una función $\mathbf{x}$ cuya imagen nos da una curva, podemos suponer que uno de los dos parámetros, por ejemplo, u, está fijo, y entonces tenemos una curva $\mathbf{x}(u, v)$ al hacer que v sea una variable. Si a continuación pensamos en u como un parámetro que puede variar, la superficie es barrida por la curva moviéndose. Así, vemos una superficie como la posición del espacio que ocupa una curva móvil.

Ejemplo 5. Un toro T es la superficie generada por una circunferencia de radio a que gira alrededor de una recta fija de su plano. Está dado, por ejemplo, por las ecuaciones, para a, b constantes con $a < b$, para la circunferencia de radio a, situada el el plano yz, por ejemplo, y con centro a una distancia b del eje z, alrededor del cual gira. La ecuación paramétrica del toro, en este caso, es

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = ((b + a \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, (b + a \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi),$$

para $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$. A partir de esta ecuación, podemos obtener la ecuación implícita, observando que si llamamos

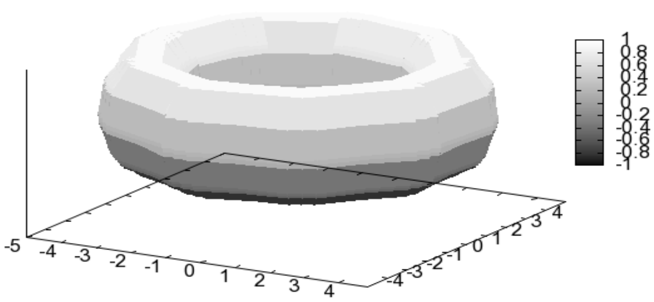
Como

$$a^2 = z^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\varphi = z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2$$
$$= z^2 + \left(b - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2.$$

Por eso, la ecuación implícita del toro es

$$\left(b - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = a^2.$$

La representación gráfica del toro se muestra a continuación.

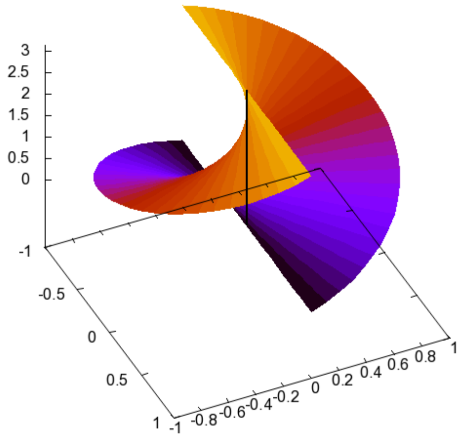


Véase el ejemplo 6 de la página 83 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, enero 2014.

Ejemplo 6. Un helicoide es la superficie formada las rectas que se apoyan en una hélice. Por ejemplo, tenemos una hélice de ecuación

$$\mathbf{x}_1(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, u)$$

sobre la que se apoyan las rectas paralelas al plano xy (o $z = 0$) y cortan al eje z y a los puntos de la hélice. La ecuación de esta recta, para cada punto $\mathbf{x}_1(u)$ es



Hay más formas de generar superficies. Otra forma es partir de una curva y hacer que giera alrededor de una recta fija (que se llama eje de rotación) que está en el mismo plano que la curva, de tal forma que la circunferencia que describe cada punto de la curva al girar está en un plano perpendicular al eje. Se llaman **superficies de revolución**.

Ejemplos de superficies de revolución son el toro (una circunfenrecia girando alrededor de un eje que no la corta), una esfera (una circunferencia girando alrededor de un eje que contiene a un diámetro suyo)

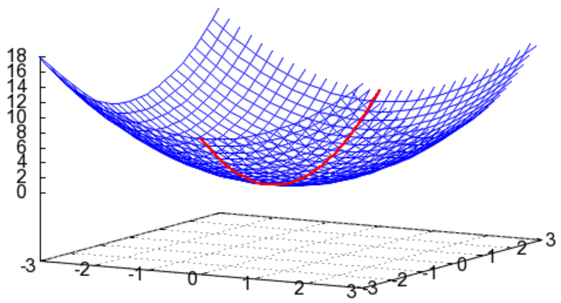
Ejemplo 7. Vamos a determinar las ecuaciones de la superficie generada al girar la curva dada por $z = y^2, x = 0$ alrededor del eje z.

Una ecuación paramétrica de la curva es

$$\mathbf{x}_1(u) = (0, u, u^2).$$

Si las coordenadas de un punto de la superficie son (x, y, z), por un lado se cumple que existe u tal que $(0, u, u^2) = (x, y, z)$. Y por otro, se tiene que cumplir que los puntos que están en la superficie y que tienen la misma

Esta superficie es un paraboloide elíptico y su gráfica (en azul), junto con la curva que lo genera (en rojo) se representa a continuación:



Las **superficie de traslación** están generadas al trasladar una curva, llamada generatriz y de ecuación $\mathbf{x}_1(u)$, moviéndose paralelamente a sí misma, a lo largo de otra curva de ecuación $\mathbf{x}_2(v)$, que se llama directriz, con la que tiene un punto en común $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1(u_0) = \mathbf{x}_2(v_0)$. La ecuación vectorial de esta superficie está dada por

$$\mathbf{x}(u,t) = \mathbf{x}2(v) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(u_0).$$

Observe que el papel de la directriz y la generatriz son intercambiables, lo que se aprecia muy bien en la ecuación.

Ejemplo 8. El cilindro es una superficie de traslación, si consideramos una recta que se traslada en una circunferencia (o una elipse) que está en su plano normal. Es además y a la vez, una superficie de revolución.

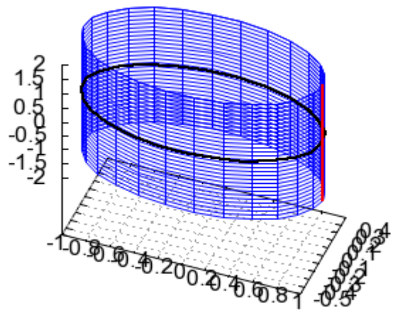
Ejemplo 9. Vamos a determinar la ecuación de la superficie de traslación que se obtiene al trasladar la recta $x = 1, y = 0$ a lo largo de la elipse $z = 0, x^2 + 4y^2 = 1$.

La generatriz es la recta y la directriz es la elipse. Una parametrización

Un punto en común es el punto $(1,0,0)$. Entonces, la ecuación de la superfice de traslación es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,\theta) &= \mathbf{x}_2(u) + \mathbf{x}_1(\theta) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (1,0,u) + \left(\cos\theta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, 0\right) - (1,0,0) \\ &= \left(\cos\theta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, u\right).\end{aligned}$$

Es un



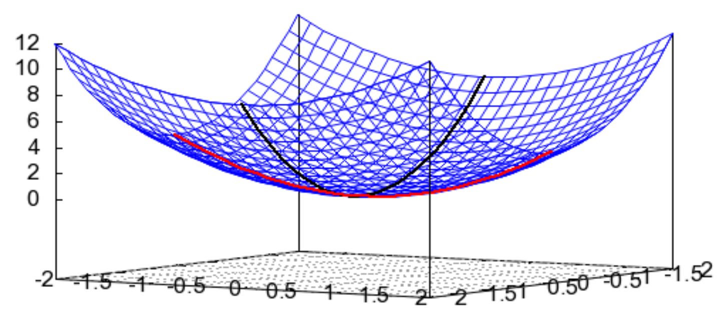
Ejemplo 10. Un paraboloide elíptico se obtiene trasladando una parábola a lo largo de otra que la corta perpendicularmente y donde el vector curvatura de ambas tiene la misma dirección y el mismo sentido. Sus secciones horizontales son elipses.

Vamos a encontrar la ecuación del paraboloide elíptico que se obtiene al trasladar la parábola $x=0, z=y^2$ a lo largo de la parábola $y=0, z=2x^2$.

La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = \left(0,u,u^2\right), \mathbf{x}_2(t) = \left(t,0,2t^2\right).$$

Un punto común es $(0,0,0) = \mathbf{x}_1(0,0,0) = \mathbf{x}_2(0,0,0)$. La ecuación de lal parabolido elíptico es



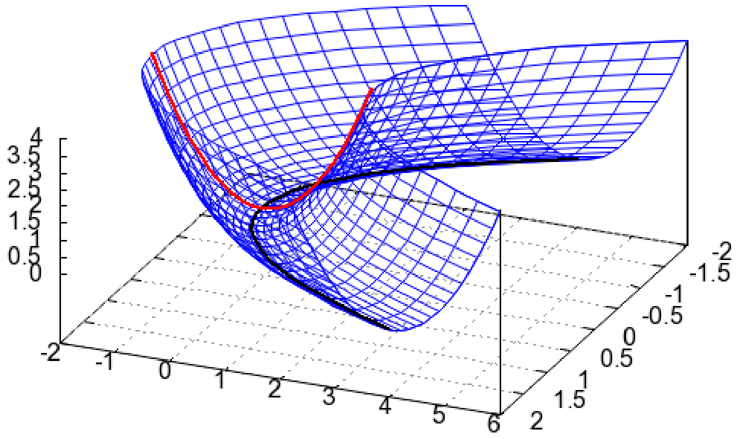
Ejemplo 11. Un hiperboloide parabólico es la traslación de una parábola a lo largo de otra que la corta perpendicularmente y donde el vector curvatura de ambas tiene la misma dirección, pero distinto sentido. Las secciones horizontales determinan hipérbolas, excepto la del plano que pasa pasa por el vértice común de las parábolas, que son dos rectas que se cortan. Si las parábolas generatriz y la directriz son iguales, las rectas son perpendiculares entre sí y forman un ángulo de $\pi/4$ radianes con respecto a las generatrices (más adelante se verá qué significa esto).

Ejemplo 12. En un paraboloide parabólico una parábola (generatriz) se traslada sobre otra (directriz) y son tales que sus vectores curvatura son perpendiculares. Las secciones horizontales determinan parábolas. Vamos a encontrar la ecuación del paraboloide parabólico que se obtiene al trasladar la parábola $x = 0, z = y^2$ a lo largo de la parábola $y = x^2, z = 0$.

La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = \left(0, u, u^2\right), \mathbf{x}_2\beta(t) = \left(t, t^2, 0\right).$$

Un punto común es $(0,0,0) = \mathbf{x}_1(0,0,0) = \mathbf{x}_2(0,0,0)$. La ecuación del paraboloide parabólico es



5.2. Superficies de Bézier. Visualización en el ordenador

Este apartado se debe estudiar en el apartado 5.1. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

5.3. Superficies parametrizadas regulares

Importante: Se debe estudiar estudiar en el apartado 5.2 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014. Se puede completar, si así lo desea con el apartado 5.3.

A continación se dan ejemplos y algunas ideas, pero no cubre todos los contenidos de este apartado.

Se parte de una parametrización de una superficie, dada por la aplicación denotamos con $\mathbf{x}_u(u,v)$ y $\mathbf{x}_v(u,v)$. Obsérvese que se indica respecto a qué variable se deriva con el subíndice, es decir

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}(u,v), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}(u,v).$$

Se dice que el punto de la superficie $\mathbf{x}(u_0,v_0)$ es **regular** si la matriz cuyas filas (o columnas) son las derivadas parciales tiene rango 2 (es decir, si la matriz jacobiana tiene rango 2). Esto es equivalente a decir que los vectores son linealmente independientes, o que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}.$$

En los puntos donde el rango de la matriz jacobiana es menor que 2 o los vectores son linealmente dependientes se llaman **singulares** y en ellos se cumple

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \mathbf{0}.$$

Una **parametrización es regular** si todos sus puntos son regulares.

Ejemplo 13. Si $f : U \to \mathbb{R}$, es una función diferenciable, entonces su grafo dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

es una superficie parametrizada.

Efectivamente:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

y se cumple que el rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

siempre de 2, por lo que todos sus puntos son regulares.

Ejemplo 14. Vamos a estudiar si la parametrización

Entonces la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 0 & -1 & 2v \end{pmatrix}$$

y su rango es 2 para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. También podíamos haber comprobado que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (1, 1, 2u) \times (0, -1, 2v) \\ &= (2v + 2u, -2v, -1) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

siempre.

A continuación en “Notas de geometría diferencial con aplicaciones” se determina el plano tangente a la superficie en un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a partir de los vectores $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$: es el plano que pasa por $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y que está generado por los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$.

Si llamamos

$$\mathbf{Normal}(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v),$$

entonces la ecuación del plano tangente a una superficie S dada por $\mathbf{x}(u, v)$ en un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ tiene por ecuación implícita

$$\mathbf{Normal}(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

También se puede encontrar a partir de:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación paramétrica del plano es

$$(x, y, z) = \mathbf{p}(\lambda, \mu) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

En “Notas de geometría diferencial con aplicaciones” se explica la diferen-

Ejemplo 15. Sea S la superficie dada por la parametrización

$$x = u^2v + v, y = v^2 + 1, z = u^2 - uv.$$

Vamos a determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente en el punto correspondiente a $u = 1, v = 1$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) &= \left(u^2v + v, v^2 + 1, u^2 - uv\right), \\ \mathbf{x}(1,1) &= (2,2,0). \end{aligned}$$

Determinamos los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (2uv, 0, 2u - v), \quad \mathbf{x}_u(1,1) = (2,0,1), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (v + 1, 2v, -u), \quad \mathbf{x}_v(1,1) = (2,2,-1). \end{aligned}$$

El plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1,1) = (2,2,0)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1,1)$ y $\mathbf{x}_v(1,1)$, es decir, su ecuación implícita es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4y - 2x + 4z - 4,$$

o $2y - x + 2z = 2$.

La ecuación paramétrica es

$$\mathbf{p}(\lambda,\mu) = (2,2,0) + \lambda(2,0,1) + \mu(2,2,-1).$$

5.4. Curvas sobre superficies

Importante: Se debe estudiar también en el apartado 5.5 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

A continación se dan ejemplos y algunas ideas, pero no cubre todos los contenidos de este apartado.

Resumiendo, si tenemos una superficie diferenciable dada por una aplicación de un conjunto U del plano (de $\mathbb{R}^2$) en el espacio, un tenemos una curva plana definida a través de otra aplicación diferenciable de un intervalo en ese conjunto U, entonces tenemos una aplicación de un intervalo en el espacio, que nos da una curva en el espacio, pero que a la vez es una curva que está contenida en la superficie S.

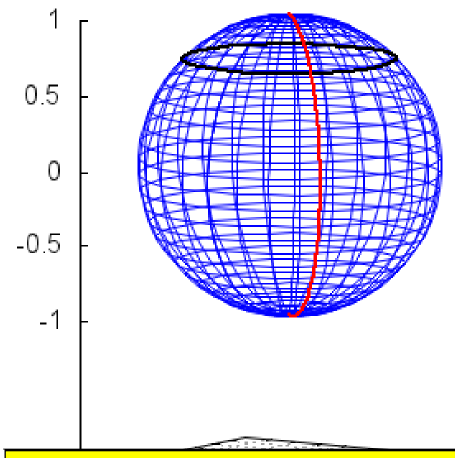
Ejemplo 16. Una parametrización de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 es

$$\mathbf{x}\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\cos\phi\right),$$

para $\theta\in\left(0,2\pi\right),\phi\in\left(0,\pi\right)$. Curvas contenidas en ella son las circunferencias dada por

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,t,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \ \text{para } t\in\left(0,2\pi\right),$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,t,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,t,\cos t\right),\ \ \text{para } t\in\left(0,\pi\right).$$

Son un paralelo y un meridiano. Se representan en la siguiente figura



Un vector tangente a la curva es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= u'(t)\,\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\,\mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \\
&= d\mathbf{x}(u, v)\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 17. Consideramos la esfera, de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$$

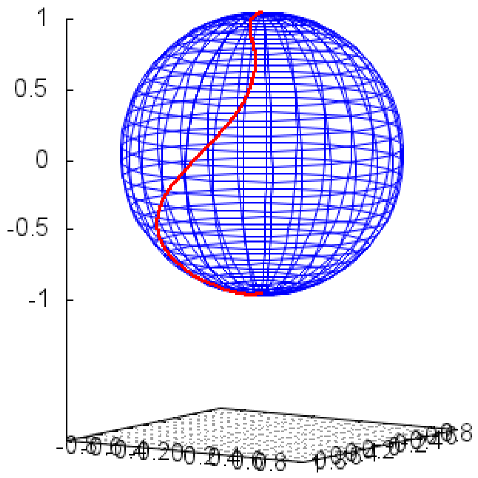
para $\theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$. Para $t \in (0, \pi)$ definimos:

$$(u(t), v(t)) = (\operatorname{sen} t \cos t, t).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(u(t), v(t)) &= (\cos u(t) \operatorname{sen} v(t), \operatorname{sen} u(t) \operatorname{sen} v(t), \cos v(t)) \\
&= (\cos(\operatorname{sen} t \cos t) \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t \cos t) \operatorname{sen} t, \cos t)
\end{aligned}$$

es la ecuación de una curva contenida en la esfera. Se representa en la siguiente figura:



entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \\ &= \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)(-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0) \\ &+ 1\,(\cos u \cos v,\ \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v)\,.\end{aligned}$$

∎

En una superficie hay varias curvas destacadas por sus propiedades. Un tipo de curvas destacadas son las **geodésicas**. Se pueden definir como curvas donde su aceleración $\mathbf{x}''(t)$ siempre es normal a la superficie, es decir, la proyección de $\mathbf{x}''(t)$ en el plano tangente es el vector $\mathbf{0}$. Intuitivamente, si nos movemos por una geodésica en la superficie, sentimos aceleración, sobre la superficie parece un movimiento de velocidad constante.

Nos preguntamos cómo obtener su ecuación. Suponemos que **t**enemos una superficie parametrizada regular, donde $\mathbf{x}$ es dos veces diferenciable con continuidad. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t)\,\mathbf{x}_u\,(u\,(t)\,, v\,(t)) + v'(t)\,\mathbf{x}_v\,(u\,(t)\,, v\,(t))$$

que escribimos simplificadamente como :

$$\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v,$$

pero teniendo siempre presente cuáles son los argumentos de cada una de las funciones que intervienen.

Derivamos de nuevo respecto a t y tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= u''\mathbf{x}_u + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} + u'v'\mathbf{x}_{uv} + v''\mathbf{x}_v + u'v'\mathbf{x}_{uv} + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv} \qquad (1) \\ &= u''\mathbf{x}_u + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + v''\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}.\end{aligned}$$

Además, para que la curva dada por $(u\,(t)\,, v\,(t))$ sea una geodésica, debe ser

$$\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_v = 0. \qquad (2)$$

Esto significa, además, que la velocidad de la geodésica es constante, ya que porque $\mathbf{x}'$ está contenido en el plano generado por $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. Como la derivada del módulo es 0, la velocidad es constante.

A partir de las condiciones 2 y de la expresión 1, resulta

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_u &= \left(u''\mathbf{x}_u + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + v''\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\right) \cdot \mathbf{x}_u \\
&= u''\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + v''\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u, \\
0 = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_v &= \left(u''\mathbf{x}_u + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + v''\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\right) \cdot \mathbf{x}_v \\
&= u''\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + (u')^2\,\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + v''\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v.
\end{aligned}$$

Ahora introducimos los **coeficientes de la primera forma fundamental**, que son las funciones definidas mediante:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.
\end{aligned}$$

Recordamos que E, F, G son evaluados en el punto $(u\,(t)\,, v\,(t))$.

Ejemplo 18. Vamos a determinar los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, que está dada por la parametrización

$$\mathbf{x}\,(\theta,\phi) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\phi)\,,$$

para $\theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$.

En un punto $\mathbf{x}\,(\theta,\phi)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\theta &= (-R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 0)\,, \\
\mathbf{x}_\phi &= (R\cos\theta\cos\phi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, -R\,\mathrm{sen}\,\phi)\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta \\
&= (-R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 0) \cdot (-R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 0) \\
&= R^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi + R^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi \\
&= (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\cdot(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= R^2\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\phi \\
&= R^2.
\end{aligned}
$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u + (v')^2\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u \\ (u')^2\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v + (v')^2\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0}.
$$

Además, como la superficie es regular, $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$ son linealmente independientes y la matriz

$$
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}
$$

tiene inversa.

Entonces, obtener las geodésicas se reduce a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.
$$

Este sistema, dada una condición inicial $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0, u'(t_0) = u_0', v'(t_0) = v_0'$ tiene solución única, ya que el lado derecho está expresado por funciones diferenciables en u, v, u', v' y t.

Intuitivamente, esto significa que dados una poposición inicial, una velocidad inicial y un instante inicial, existe una única geodésica que pasa por la posición inicial en el instante inicial con esa velocidad. Pero esta curva no debe estar dada necesariamente para todo instante $t \in \mathbb{R}$.

Señalamos que aunque la geodésica es una curva de velocidad constante, no es cierto que cualquier curva de velocidad constante sobre una superficie sea una geodésica.

Una curva está dada por $(u(t), v(t))$. Entonces, calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental para plantear la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1. \end{aligned}$$

Además:

$$\mathbf{x}_{uu} = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,0),$$

por lo que

$$\begin{aligned} A &= (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = 0, \\ B &= (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = 0. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de las geodésicas es

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 0 = u''(t), \\ 0 = v''(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Faltan las condiciones iniciales. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $t = t_0$ y que pasa por el punto $(0,0)$, es decir

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Además, suponemos que el vector tangente a la curva es (u_1, v_1), es decir, que se cumple:

$$u'(0) = u_1, \quad v'(0) = v_1.$$

Resolvemos este sistema y resulta:

$$\begin{aligned} u'(t) &= a, \quad u(t) = at + b, \\ v'(t) &= c, \quad v(t) = ct + d, \end{aligned}$$

para a, b, c, d constantes. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es:

$$\begin{aligned} u'(0) &= a = u_1, \quad u(0) = b = 0, \\ v'(0) &= c = v_1, \quad v(0) = d = 0. \end{aligned}$$

Por eso, la ecuación de la curva es

5.5. Primera forma fundamental

Importante: Se debe estudiar también en el apartado 6.1 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Ya hemos definido los coeficientes de la primera forma fundamental, que son:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Con estos coeficientes es posible realizar medidas intrínsecas en la superficie: distancia, ángulos y áreas.

Longitudes

Tenemos una curva $\mathbf{x}(t)$ para $t \in [a, b]$ que está contenida en la superficie $\mathbf{x}(u, v)$. Su longitud está dada por

$$L = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| \, dt = \int_a^b (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t))^{\frac{1}{2}} \, dt.$$

Como

$$\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v,$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' &= (u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v) \cdot (u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v) \\ &= (u')^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

Entonces la longitud es

$$L = \int_a^b \left(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Es decir, la primera forma fundamental relaciona u elemento de longitud con la variación de cada uno de los parámetros de la superficie, en las **curvas parámetro o curvas coordenadas** (u =constante, v =constante). Si los vectores tangentes a las curvas coordenadas son perpendiculares (es decir $dudv = 0$), entonces la geometría de la superficie será euclídea.

Ejemplo 20. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, v)$$

para $v > 0, 0 < u < \pi$. Vamos a calcular la longitud de la curva parámetro $v = 1$.

Necesitamos los coeficientes de la primera forma fundamental. De los ejercicios sabemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, 0), \\
\mathbf{x}_v &= (\cos u, \operatorname{sen} u, 1), \\
E &= v^2, \\
F &= 0, \\
G &= 2.
\end{aligned}$$

Ahora, la curva parámetro $v = 1$ es la curva dada por

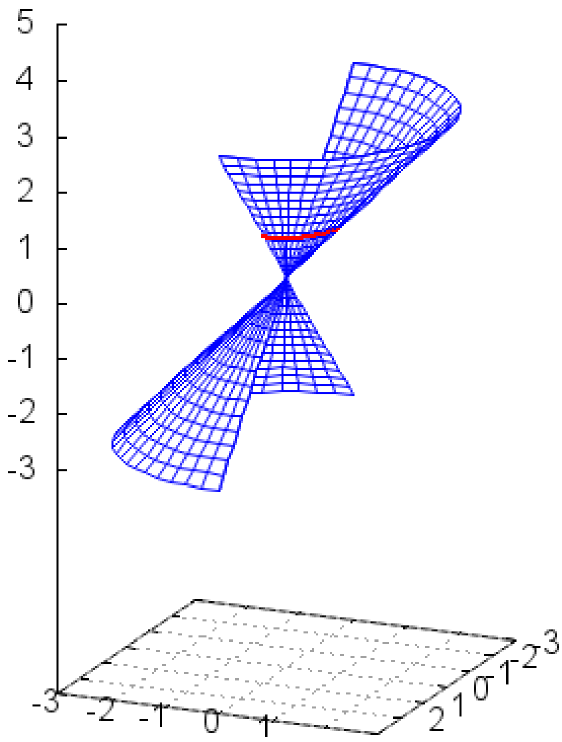
$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1),$$

ya que $v = 1, u = t$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
&E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2, \\
&u' = 1, \quad v' = 0.
\end{aligned}$$

y la longitud de esta curva parámetro es:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^\pi (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \int_0^\pi dt = t|_0^\pi = \pi.
\end{aligned}$$



Ángulos

Tenemos dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ tangentes a la superficie en un punto de ella, $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ son vectores del plano tangente y son linealmente independientes, y por eso son base del plano tangente. Por eso, podemos escribir $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ en función de ellos:

$$\mathbf{u}_i = u_i \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + v_i \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

para $i = 1, 2$. El coseno del ángulo α que forman nos lo da el producto escalar:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\| \, \|\mathbf{u}_2\|}.$$

Entonces, el ángulo que forman es

$$\cos\alpha = \frac{u_1 u_2 E + (u_1 v_2 + u_2 v_1) F + v_1 v_2 G}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|}$$

Ejemplo 21. Sea S la superficie dada por

$$x = u\cos v, y = u \operatorname{sen} v, z = u^2.$$

Vamos a determinar el ángulo que forman los vectores $(1, 1, 2)$ y $(1, -2, 2)$, tangentes a la superficie en el punto $(1, 0, 1)$.

Por los ejercicios, sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{aligned} E &= 1 + 4u^2, \\ F &= 0, \\ G &= u^2. \end{aligned}$$

El punto $(1, 0, 1)$ se corresponde con los valores de $u = 1, v = 0$. Comprobamos que estos vectores son tangentes a la superficie en este punto. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u (u, v) &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), & \mathbf{x}_u (1, 0) &= (1, 0, 2), \\ \mathbf{x}_v (u, v) &= (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0), & \mathbf{x}_v (1, 0) &= (0, 1, 0), \end{aligned}$$

son tangentes, y que

$$\begin{aligned} (1, 1, 2) &= \mathbf{x}_u (1, 0) + \mathbf{x}_v (1, 0), \\ (1, -2, 2) &= \mathbf{x}_u (1, 0) - 2\mathbf{x}_v (1, 0). \end{aligned}$$

Entonces $u_1 = 1, v_1 = 1, u_2 = 1, v_2 = -2,\ E = 5, F = 0, G = 1$ y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{1^1 + 1^1 + 2^2} = \sqrt{6}, \\ \|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{1^1 + (-2)^2 + 2^2} = 3. \end{aligned}$$

El coseno del ángulo que forman es

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 5 + (1(-2) + 1 \cdot 1)\, 0 + 1(-2)\, 1}{3\sqrt{6}} \\ &= \frac{5-2}{\ } = \frac{1}{\ } \end{aligned}$$

Aunque no lo vamos a ver aquí con ejemplos, señalamos que así también podemos formar el ángulo que forman dos curvas contenidas en una superficie que se cortan en un punto P: es el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en el punto P.

En particular, si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ son las curvas parámetro $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v)$, entonces

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

En efecto, las curva parámetro cumplen $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_u$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_v$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{u_1u_2E + (u_1v_2 + u_2v_1)F + v_1v_2G}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{u}_2\|} \\ &= \frac{1\cdot 0\cdot E + (1\cdot 1 + 0\cdot 0)F + 0\cdot 1\cdot G}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \\ &= \frac{F}{\sqrt{EG}}.\end{aligned}$$

Además, dos curvas son ortogonales si y sólo si

$$Eh_1k_1 + 2F(h_1k_2 + h_2k_1) + Gh_2k_2 = 0.$$

Las curvas parámetro son ortogonales si y sólo si $F = 0$.

Áreas

Podemos proceder igual a como se hizo para el cálculo de la longitud de una curva sobre una superficie, podemos determinar el área de una región R que está delimitada por las curvas coordenadas $\mathbf{x}(u_0, v)$, $\mathbf{x}(u_1, v)$, $\mathbf{x}(u, v_0)$, $\mathbf{x}(u, v_1)$ de una superficie S dada por $\mathbf{x}(u, v)$. Si consideramos un paralelogramo curvilínea con vértices suficientemente cercanos, $\mathbf{x}(u, v)$, $\mathbf{x}(u + du, v)$, $\mathbf{x}(u, v + dv)$, $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$ se puede aproximar para du y dv suficientemente pequeños, por el paralelogramo determinado por los tres primeros vértices. Su área es

$$dA = \|(\mathbf{x}(u + du, v) - \mathbf{x}(u, v)) \times (\mathbf{x}(u, v + dv) - \mathbf{x}(u, v))\|.$$

Podemos seguir aproximando:

A partir de esta expresión, podemos determinar el área de R, mediante:

$$\begin{aligned} A &= \int\int_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv \\ &= \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv. \end{aligned}$$

Este área no coincide necesariamente con el área de $\mathbf{x}(R)$, porque $\mathbf{x}$ no es necesariamente inyectiva.

Pero además, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

Entonces, el área de R es la siguiente integral doble

$$A = \int\int_W \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

donde W es el conjunto de puntos que están en $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$.

Ejemplo 22. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, v)$$

para $v > 0, 0 < u < 2\pi$. Vamos a determinar el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $u_0 = \frac{\pi}{2}, u_1 = \pi$ y $v_0 = 1, v_1 = 2$.

Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = v^2, \quad F = 0, \quad G = 2.$$

Además, para la rgión considerada, es:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}v.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{EG-F^2}dudv \\
&= \int_1^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}vdudv = \sqrt{2}\int_1^2 vu|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dv \\
&= \sqrt{2}\int_1^2 v\frac{\pi}{2}dv = \sqrt{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}v^2\Big|_1^2 \\
&= \sqrt{2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}2^2-\frac{1}{2}1^2\right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}$$

■

5.6. Segunda forma fundamental

Se debe estudiar, **además de por estos apuntes,** en los apartados 6.2 y 6.3 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

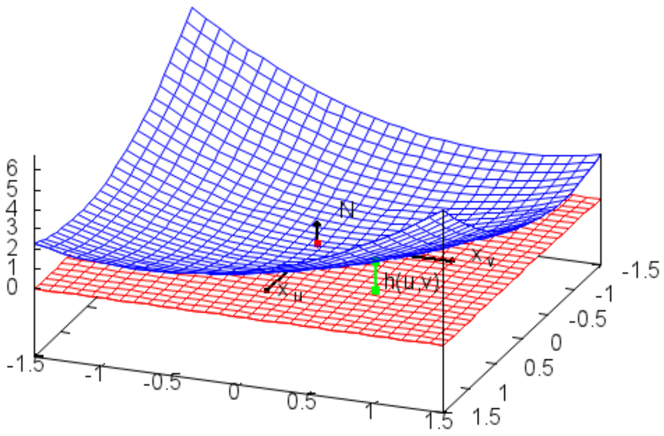
Consideramos una superficie regular S. Como $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$ son linealmente independientes y están contenidos en el plano tangente, entonces el vector unitario

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Parece natural estudiar la forma de la superficie cerca de un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a partir del plano tangente y de la altura (con signo) de un punto de la superficie con respecto al plano tangente en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$, es decir, con:

$$h(u,v) = (\mathbf{x}(u,v) - \mathbf{x}(u_0,v_0)) \cdot \mathbf{N}(u_0,v_0).$$

Esto se representa en la siguiente figura:



Igual que como hicimos para determinar la forma canónica de una curva, vamos a aproximar $h(u,v)$ utilizando el desarrollo de Taylor de $\mathbf{x}(u,v)$ cerca de (u_0,v_0) de orden 2. Resulta (véase "Notas de geometría diferencial con aplicaciones", para $\triangle u = u - u_0$, $\triangle v = v - v_0$:

$$
\begin{aligned}
h(u,v) = {} & \Big(\mathbf{x}_u(u_0,v_0)\triangle u + \mathbf{x}_v(u_0,v_0)\triangle v \\
& + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_{uu}(u_0,v_0)\triangle u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}(u_0,v_0)\triangle u\triangle v + \mathbf{x}_{vv}(u_0,v_0)\triangle v^2\right)\Big)\cdot \mathbf{N}(u_0,v_0) \\
& + O\left(\triangle u^2 + \triangle v^2\right) \\
= {} & \frac{1}{2}\mathbf{x}_{uu}(u_0,v_0)\cdot \mathbf{N}(u_0,v_0)\triangle u^2 \\
& + \mathbf{x}_{uv}(u_0,v_0)\cdot \mathbf{N}(u_0,v_0)\triangle u\triangle v \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{vv}(u_0,v_0)\cdot \mathbf{N}(u_0,v_0)\triangle v^2 \\
& + O\left(\triangle u^2 + \triangle v^2\right).
\end{aligned}
$$

Recordamos que $O(\triangle u^2 + \triangle v^2)$ significa que la aproximación es de orden 2 o que

$$O\left(\triangle u^2 + \triangle v^2\right)$$

los **coeficientes de la segunda forma fundamental**:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0), \\ f &= \mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0), \\ g &= \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, podemos definir una aplicación que a cada vector $(\triangle u, \triangle u)$ le asigna

$$II_{(u,v)}(\triangle u, \triangle v) = e(u,v)\triangle u^2 + 2f(u,v)\triangle u \triangle v + g(u,v)\triangle v^2.$$

Obsérvese que $(\triangle u, \triangle u)$ representa un vector del espacio tangente, porque la superficie en ese punto está dada por coordenadas locales (u, v). Por eso, podemos ver $II_{(u,v)}$ como una forma cuadrática definida sobre el espacio tangente a la superficie. Se llama **segunda forma fundamental**.

Ejemplo 23. Vamos a determinar la segunda forma fundamental de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, que está dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

En un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ sabemos que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0), \ \mathbf{x}_\phi = (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi), \\ &\mathbf{x}_{\theta\theta} = (-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0), \ \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0), \\ &\mathbf{x}_{\phi\phi} = (-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi). \end{aligned}$$

Tenemos que calcular el vector normal unitario $\mathbf{N}$. El vector

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \times (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\ &= R^2\left(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right), \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= R^2\sqrt{(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\cos\phi\operatorname{sen}\phi)^2} \\ &= R^2\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\\
&= R\operatorname{sen}^2\phi\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0)\\
&= 0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi)\\
&= R.
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{w} = (h, k)$ es un vector del plano tangente a S en P, expresado en la base $\{\mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\phi\}$, entonces

$$II_P(\mathbf{w}) = eh^2 + 2fhk + gk^2 = h^2R\operatorname{sen}^2\phi + 2\cdot 0\cdot hk + Rk^2 = h^2R\operatorname{sen}^2\phi + Rk^2.$$

Volviendo a $h(u, v)$, sabemos que

$$h(u,v) = \frac{1}{2}II_{(u,v)}(\triangle u, \triangle v) + O\left(\triangle u^2 + \triangle v^2\right).$$

Esto significa que la aproximación de orden 2 no nula en un entorno de $\mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$, de la altura (con signo) sobre el plano tangente en el punto está dada por esta forma cuadrática, salvo el factor $1/2$.

Si está familiarizado con las cuádricas (si no lo está, puede dejar este párrafo para una lectura posterior) sabrá que como es una forma cuadrática, su matriz asociada

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

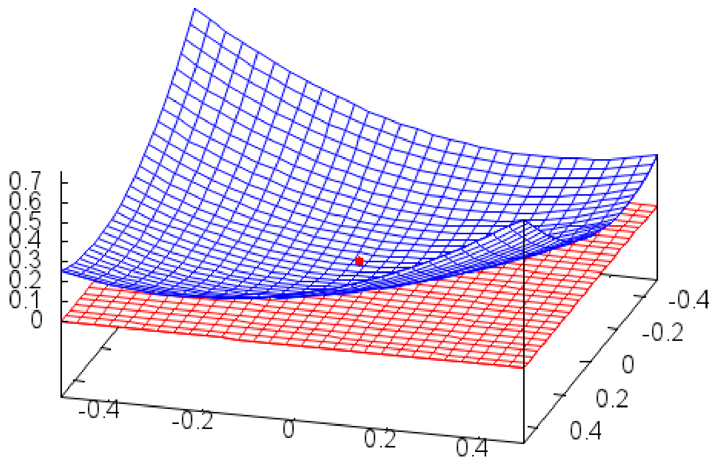
define una cuádrica. Esta será la cuádrica a la que más se acerca la forma de la superficie en un entorno del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Podemos determinar qué cuádrica define a partir del determinante de su matriz asociada, es decir, a partir del valor de

$$eg - f^2.$$

Este hecho nos da una justificación intuitiva a la segunda forma fundamental.

Si la segunda forma fundamental es definida, es decir, si

$$eg - f^2 > 0,$$



Ejemplo 24. Para los puntos de la esfera, tenemos:

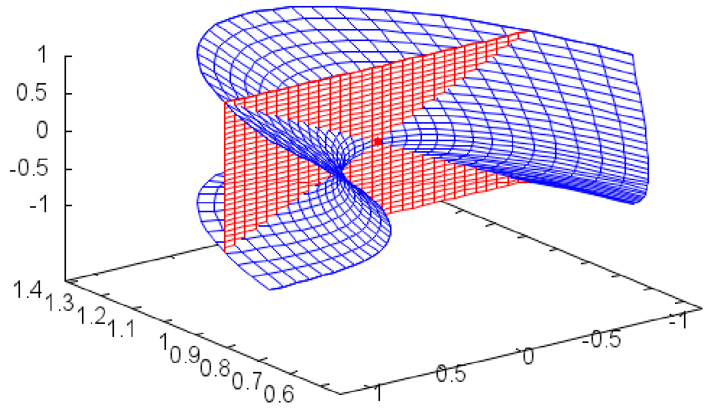
$$eg - f^2 = R^2 \operatorname{sen}^2\phi - 0 > 0$$

y, por eso, todos los puntos de la esfera son elípticos. ∎

Puede suceder que la segunda forma fundamental sea no definida y no degenerada, es decir, que

$$eg - f^2 < 0.$$

Esto implica que cerca del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ la aproximación de $h(u, v)$ cambia de signo, es decir, que hay puntos que están a un lado del plano tangente y puntos que están al otro lado. Estos puntos se llaman **puntos hiperbólicos** y su posición respecto al plano tangente se representa en la siguiente figura:



Ejemplo 25. Vamos a clasificar el punto $(1,0,0)$ en la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(\sqrt{1+u^2}\cos v,\sqrt{1+u^2}\operatorname{sen} v,u\right).$$

Sabemos que $\mathbf{x}(0,0)=(1,0,0)$. Determinamos los vectores

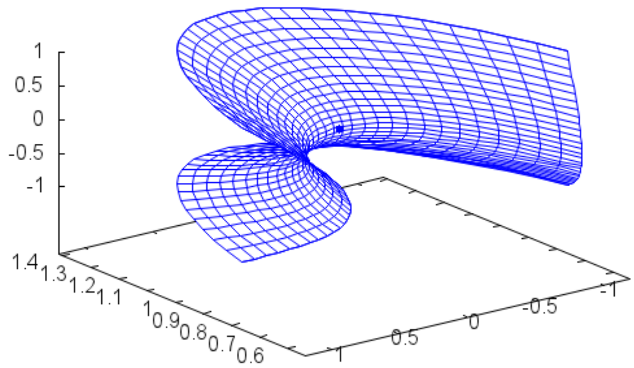
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v)&=\left(\tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v,\tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\operatorname{sen} v,1\right), & \mathbf{x}_u(0,0)&=(0,0,1),\\
\mathbf{x}_v(u,v)&=\left(-\sqrt{1+u^2}\operatorname{sen} v,\sqrt{1+u^2}\cos v,0\right) & \mathbf{x}_v(0,0)&=(0,1,0).
\end{aligned}$$

Por eso, el vector $\mathbf{N}=(0,0,1)$ es normal a la superficie en $(1,0,0)$. Además:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu}(u,v)&=\left(\tfrac{\cos v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},\tfrac{\operatorname{sen} v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},0\right), & \mathbf{x}_{uu}(0,0)&=(1,0,0),\\
\mathbf{x}_{uv}(u,v)&=\left(-\tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\operatorname{sen} v,\tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v,1\right), & \mathbf{x}_{uv}(0,0)&=(0,0,1),\\
\mathbf{x}_{vv}(u,v)&=\left(-\sqrt{1+u^2}\cos v,-\sqrt{1+u^2}\operatorname{sen} v,0\right), & \mathbf{x}_{vv}(0,0)&=(-1,0,0).
\end{aligned}$$

Entonces

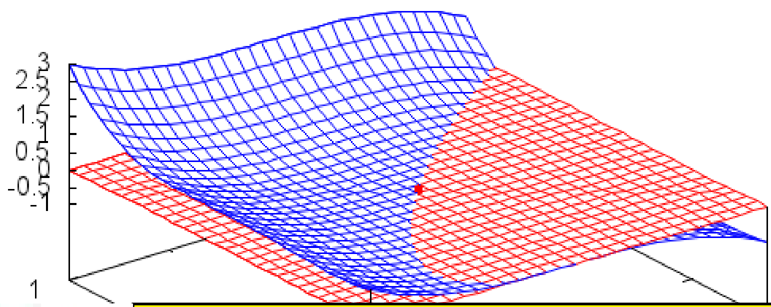
$$\begin{aligned}
e&=\mathbf{x}_{uu}(0,0)\cdot\mathbf{N}(0,0)=(1,0,0)\cdot(1,0,0)=1,\\
f&=\mathbf{x}_{uv}(0,0)\cdot\mathbf{N}(0,0)=(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0,
\end{aligned}$$



Cuando $eg-f^2=0$ la segunda forma fundamental es degenerada. Aquí pueden ocurrir dos cosas. Puede ser que la segunda forma fundamental sea nula, es decir,

$$e=f=g=0$$

y entonces el punto es plano (no implica que la superficie sea un plano). Un **punto plano** se representa en la siguiente figura:



Ejemplo 26. Sea la superficie $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^3+u^6+v^4)$ donde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Vamos a estudiar qué clase de punto es $\mathbf{x}(0,0)$.

Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}\,(u,v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u\,(u,v) &= (1,0,3u^2+6u^5)\,, \quad & \mathbf{x}_u(0,0) &= (1,0,0)\,, \\ \mathbf{x}_v\,(u,v) &= (0,1,4v^3)\,, & \mathbf{x}_v(0,0) &= (0,1,0)\,. \end{aligned}$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$(1,0,0)\times(0,1,0) = (0,0,1)\,.$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}\,(u,v) &= \left(0,0,6u+30u^4\right), \quad \mathbf{x}_{uu}(0,0) = (0,0,0)\,, \\ \mathbf{x}_{vv}\,(u,v) &= \left(0,0,12v^2\right), \quad \mathbf{x}_{vv}(0,0) = (0,0,0)\,, \\ \mathbf{x}_{uv}\,(u,v) &= (0,0,0)\,, \quad \mathbf{x}_{uv}(0,0) = (0,0,0)\,. \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

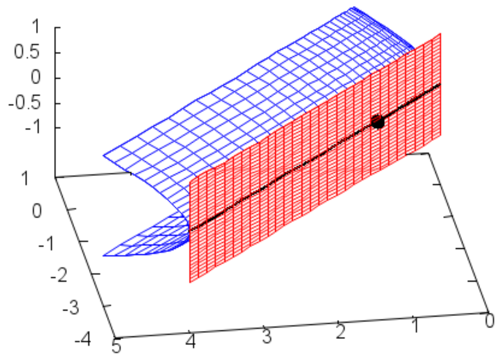
$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu} = (0,0,0)\cdot(0,0,1) = 0, \\ f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv} = (0,0,0)\cdot(0,0,1) = 0, \\ g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{v\,v} = (0,0,0)\cdot(0,0,1) = 0. \end{aligned}$$

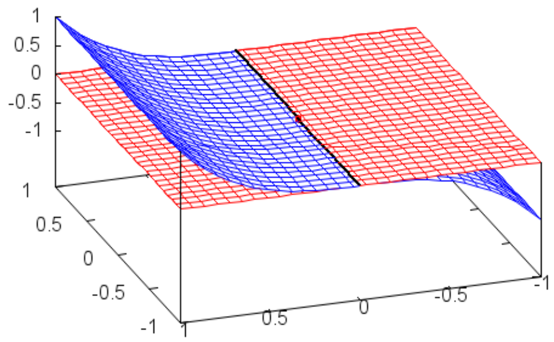
Entonces

$$eg - f^2 = 0$$

y el punto es plano. $\blacksquare$

También puede ocurrir que aunque $eg-f^2=0$ no sean 0 todos los coeficientes de la segunda forma fundamental, es decir, que la forma cuadrática no sea nula. En ese caso, se dice que el **punto es parabólico**. Que $eg-f^2=0$ implica que hay una recta a lo largo de la cual se anula la segunda forma fundamental. Y no se puede asegurar nada sobre la posición del plano tangente, porque los términos de orden superior dominan. La situación se ilustra en las siguientes figuras:





Si tenemos una curva en el espacio dada por $\mathbf{x}(u(t), v(t))$, podemos determinar la altura respecto a un punto de parámetro t_0. Entonces, repitiendo el proceso anterior, tenemos que $h(t_0) = h'(t_0) = 0$ y que se cumple

$$h(t) = \frac{1}{2} II(u'(t_0), u'(t_0))(t - t_0)^2 + O\left((t - t_0)^2\right).$$

y $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v = 0.$$

De aquí se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v. \end{aligned}$$

Y entonces se cumple:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ f &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ g &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v. \end{aligned}$$

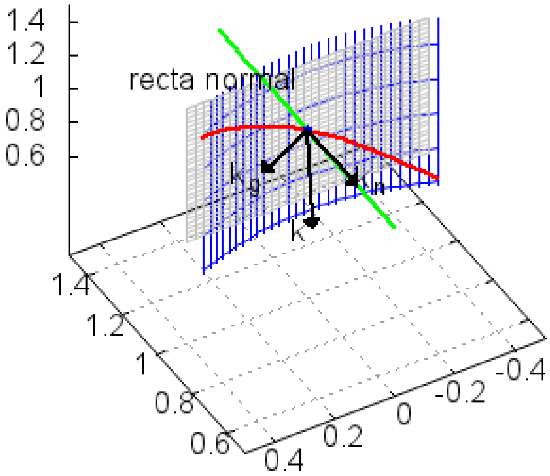
Observamos que como la segunda forma fundamental $II(u', v')$ es una forma cuadrática, utilizando lo que conocemos para ellas, podemos contestar a preguntas como ¿en qué dirección varía la función con mayor o menor rapidez? Se contesta en las secciones siguientes.

Curvatura normal y curvatura geodésica

Partimos de una curva C parametrizada por la longitud de arco que está contenida en una superficie, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$. Nótese que la curva $(u(s), v(s))$ no está parametrizada por el arco necesariamente. Como $\mathbf{x}(s)$ está parametriza por el arco, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \mathbf{x}'(s), \\ \|\mathbf{x}'(s)\| &= 1, \\ \mathbf{k}(s) &= \mathbf{x}''(s). \end{aligned}$$

Llamamos **vector curvatura geodésica** de la curva C en el punto $\mathbf{x}(s_0)$ al vector $\mathbf{k}_g(s_0)$ y **vector curvatura normal** de la curva C en el punto $\mathbf{x}(s_0)$ al vector $\mathbf{k}_n(s_0)$. La situación se representa en la siguiente figura:



Podemos calcular $\mathbf{k}_g(s)$ y $\mathbf{k}_n(s)$ a partir del vector normal $\mathbf{N}$. Observamos que si $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$, entonces $\mathbf{k}_n(s) = \kappa_n(s)\mathbf{N}(s)$ y:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{N}(s) &= (\mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)) \cdot \mathbf{N}(s) \\
&= \mathbf{k}_g(s) \cdot \mathbf{N}(s) + \mathbf{k}_n(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\
&= \mathbf{k}_n(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\
&= \kappa_n(s)\mathbf{N}(s).
\end{aligned}$$

Por esto:

$$\mathbf{k}_n(s) = \kappa_n(s)\mathbf{N}(s) = (\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N}(s))\mathbf{N}(s),$$

Ejemplo 27. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v)\,.$$

Vamos a determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1,0,0)$ para la circunferencia dada por $\mathbf{x}(s) = (\cos s,\ \operatorname{sen} s, 0)$, contenida en él. Encontraremos también su curvatura normal.

Nótese que la ecuación de la curva y de la superficie es denotada como $\mathbf{x}$. Va a quedar claro a cuál nos referiremos tanto por el contexto como por el número de variables que utilicemos.

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\,,\\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (0,0,1)\,.\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u,v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)\|}\\ &= \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\times(0,0,1)}{\|(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\times(0,0,1)\|}\\ &= (\cos u,\ \operatorname{sen} u, 0)\,.\end{aligned}$$

Como $(1,0,0) = \mathbf{x}(0,0) = \mathbf{x}(0)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(0,0) &= (-\operatorname{sen} 0, \cos 0, 0) = (0,1,0)\,,\\ \mathbf{x}_v(0,0) &= (0,0,1)\,,\\ \mathbf{N}(0,0) &= (\cos 0,\ \operatorname{sen} 0, 0) = (1,0,0)\,.\end{aligned}$$

La circunferencia está parametrizada por la longitud de arco. Entonces, el vector curvatura es la derivada segunda de $\mathbf{x}$ respecto a s. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0)\,, & \mathbf{x}'(0) &= (0,1,0)\,,\\ \mathbf{x}''(s) &= (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0)\,, & \mathbf{x}''(0) &= (-1,0,0)\,.\end{aligned}$$

y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(0,1,0)\,,\ (0,0,1)$ y una base de la recta normal es $(1,0,0)$, tenemos que

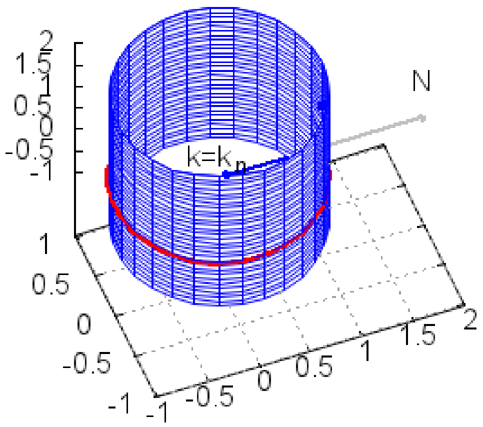
$$\begin{aligned}&(-1,0,0) = (0,0,0) + (-1,0,0)\\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \mathbf{k}_g\,(s) = (0,0,0)\,,\ \mathbf{k}_n\,(s) = (-1,0,0) = -1\,(1,0,0)\,.\end{aligned}$$

En este caso, el vector curvatura geodésica es el vector nulo y

$$k\,(0) = 1 = -\kappa_n.$$

Entonces la curvatura normal vale $\kappa_n = -1$.Sus valores absolutos coinciden. Por otro lado, el plano tangente a la superficie es perpendicular al vector normal a la curva y, el vector tangente a la curva está contenido en él. Por eso, los planos osculador de la curva y tangente a la superficie son perpendiculares.

En la siguiente figura se representan el cilindro, la circunferencia, los vectores curvatura y curvatura normal, que coinciden, en azul y el vector normal a la superficie en gris.



Vamos a encontrar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal y la curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1,0,1)$.

Sabemos que $(1,0,1) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0,1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(0,1) &= (-\operatorname{sen} 0, \cos 0, 0) = (0,1,0)\,,\\
\mathbf{x}_v(0,1) &= (0,0,1)\,,\\
\mathbf{N}(0,1) &= (\cos 0,\ \operatorname{sen} 0, 0) = (1,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para la elipse tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t + \cos t)\,, & \mathbf{x}'(0) &= (0,1,1)\,,\\
\mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, -\cos t - \operatorname{sen} t)\,, & \mathbf{x}''(0) &= (-1,0,-1)\,.
\end{aligned}$$

Sabemos que el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Entonces, el vector $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)\\
&= ((0,1,1) \times (-1,0,-1)) \times (0,1,1)\\
&= (-1,-1,1) \times (0,1,1)\\
&= (-2,1,-1)\,.
\end{aligned}$$

El vector normal unitario es

$$\mathbf{N}(0) = \frac{(-2,1,-1)}{\|(-2,1,-1)\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,-1)\,.$$

Por otro lado, la curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,-1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(-2,1,-1).\end{aligned}$$

Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y una base de la recta normal es $(1,0,0)$, tenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{12}(-2,1,-1) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0,1,-1) + \frac{-\sqrt{3}}{6}(1,0,0),$$

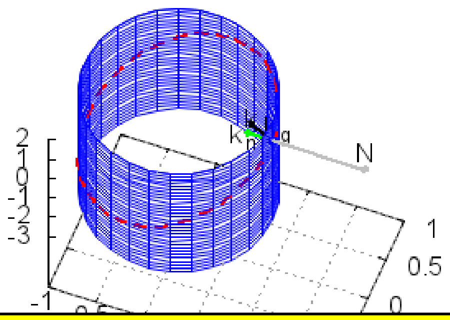
donde

$$\mathbf{k}_g(0) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0,1,-1), \quad \mathbf{k}_n(0) = \frac{-\sqrt{3}}{6}(1,0,0).$$

La curvatura normal es

$$\kappa_n = \frac{-\sqrt{3}}{6}.$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la elipse, los vectores curvatura (en azul), curvatura geodésica (en rojo) y curvatura normal (en verde) y normal a la superficie (en gris).



una integral elíptica, que no tiene solución a partir de funciones elementales.

$\blacksquare$

Detengámonos en la curvatura geodésica. Como una curva es geodésica si y sólo si el vector curvatura es proporcional al vector normal, a partir de esta definición, observamos que una curva es geodésica si y sólo si su vector curvatura geodésica es el vector nulo.

Estudiemos ahora la curvatura normal. Podemos derivar la igualdad $\mathbf{x}'(s)\cdot \mathbf{N}(s) = 0$ y tenemos:

$$\mathbf{x}''(s)\cdot \mathbf{N}(s) = -\mathbf{x}'(s)\cdot \mathbf{N}'(s) \Longrightarrow \kappa_n(s) = -\mathbf{x}'(s)\cdot \mathbf{N}'(s).$$

Vamos a obtener $\mathbf{N}'$. Sabemos que $\mathbf{N}$ y $\mathbf{x}$ dependen de u y v y, por eso, derivando implícitamente respecto a s, resulta:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\kappa_n(s) &= -\mathbf{x}'(s)\cdot \mathbf{N}'(s) \\
&= -(\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v')\cdot(\mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v') \\
&= -\mathbf{x}_u\cdot \mathbf{N}_u u'u' - \mathbf{x}_v\cdot \mathbf{N}_u u'v' - \mathbf{x}_u\cdot \mathbf{N}_v v'u' - \mathbf{x}_v\cdot \mathbf{N}_v v'v' \\
&= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \\
&= II(u', v').
\end{aligned}$$

Esta expresión es la segunda forma fundamental aplicada al vector unitario del plano tangente (u', v'). Esto significa, que podemos ver la segunda forma fundamental en un vector unitario como la curvatura normal de una curva de la superficie cuyo vector tangente es ese vector unitario.

Si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, sustituimos (u', v') por $(u'/\|\mathbf{x}'(t)\|, v'/\|\mathbf{x}'(t)\|)$. Entonces, estas coordenadas ya son las del vector unitario de la curva parametrizada por el arco y tenemos:

$$\kappa_n(s) = e\left(\frac{u'}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\right)^2 + 2f\frac{u'}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\frac{v'}{\|\mathbf{x}'(t)\|} + g\left(\frac{v'}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\right)^2$$

Sabemos que la expresión de la curvatura normal es

$$\kappa_n(h,k) = \frac{II_P(h,k)}{I_P(h,k)} = \frac{eh^2 + 2fhk + gk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2} = \frac{h^2 + k^2}{2h^2 - 2hk + 4k^2}$$
$$= \frac{1^2 + (-1)^2}{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4(-1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Obsérvese que se determina la curvatura normal en una dirección, porque la curvatura normal sólo depende de la dirección del vector tangente a la curva.

■

La expresión de la curvatura normal a partir de las formas fundamentales nos dice que el valor de la curvatura normal es el cociente de las formas fundamentales en el vector $u'(t), v'(t)$. Por eso, $\kappa_n(t)$ sólo depende de la dirección este vector o, dicho de otra manera, todas las curvas de una superficie con la misma dirección tangente tienen la misma curvatura normal. Así se puede hablar de curvatura normal según una dirección.

Un resultado interesante es que si el plano tangente a la superficie coincide con el plano osculador de la curva en un punto, la curvatura normal en ese punto cumple $\kappa_n(s) = 0$. Demostrémoslo. Partimos de una curva parametrizada por la longitud de arco. Si el plano tangente a la superficie coincide con el plano osculador a la superficie (determinado por $\mathbf{x}' = \mathbf{t}$ y por $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$), entonces el vector $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$ está en el espacio tangente, lo que significa que

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s), \quad \mathbf{k}_n(s) = \mathbf{0}.$$

Por eso, la curvatura normal cumple

$$\kappa_n(s) = 0.$$

Otro resultado interesante, que nos ayuda a entender geométricamente el vector curvatura normal, es el siguiente. Si la curvatura normal κ_n de una curva en una superficie y la curvatura k de una curva son iguales en valor absoluto, entonces los planos osculador a la curva y tangente a la superficie son perpendiculares. En efecto, tenemos:

si α es el ángulo que forman $\mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{N}(s)$. Para que se cumpla la igualdad, debe ser $\alpha = 0, \pi$. Esto significa que $\mathbf{x}''(s)$ (o $\mathbf{k}(s)$) y $\mathbf{N}(s)$ tienen la misma dirección. Pero como $\mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{x}'(s)$ determinar el plano osculador a la curva, entonces $\mathbf{N}(s)$ es paralelo al plano osculador y, por eso, el plano tangente a la superficie (con vector normal $\mathbf{N}(s)$) es perpendicular al plano osculador a la curva en el punto considerado.

Una consecuencia de esto es que la curvatura y la curvatura normal son iguales en cada una de las curvas intersección de la superficie con un plano perpendicular al plano tangente.

Además, todas las curvas de una superficie que pasan por un punto P y que tienen el mismo plano osculador, tienen la misma curvatura k, suponiendo que el plano osculador no coincida con el plano tangente a la superficie en P.

Ejemplo 30. El plano osculador de la circunferencia contenida en un cilindro y que es paralela a su eje es perpendicular al plano tangente al cilindro. Además, la curvatura y la curvatura normal son iguales en valor absoluto, como vimos en un ejemplo anterior.

Por otro lado, si consideramos la hélice de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

contenida en el cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

tiene, en el punto $(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0)$ los mismos vectores tangente y normal que la circunferencia de ecuación $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Por eso, la curvatura va a ser la misma en ambas curvas.

Secciones normales

Una forma de obtener una curva en una superficie es determinarla a partir de la intersección de un plano con la superficie. La razón está en que al añadir la restricción de que los puntos estén en el plano, pasamos de los dos grados de libertad de la superficie a uno.

Pero como los puntos además están en el plano, tenemos:

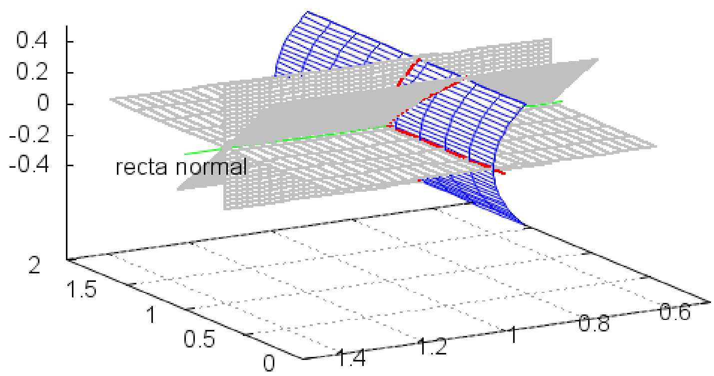
$$
\begin{aligned}
2u - v^3 = z = x + y - 2 = u + v^2 - 2 \\
\Longrightarrow u = v^3 + v^2 - 2..
\end{aligned}
$$

Si llamamos $v = t$, podemos escribir la curva en función de t, ya que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = \left(t^3 + t^2 - 2, t^2, 2\left(t^3 + t^2 - 2\right) - t^3\right) \\
\Longrightarrow \mathbf{x}(t) = \left(t^3 + t^2 - 2, t^2, t^3 + 2t^2 - 4\right).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Por otro lado, sabemos que todas las curvas de una superficie con una misma recta tangente (o vector tangente) tienen la misma curvatura normal. Dicho de otra forma, si consideramos el haz de curvas formado por la intersección de los planos normales a la superficie que pasan por el punto P, entonces todas las curvas resultantes tienen la misma curvatura normal. Las curvas resultantes tienen todas las direcciones posibles. Estas curvas se llaman **secciones normales**. En la siguiente figura se representa una sección de un cilindro, con la recta normal (en verde), planos que la contienen (en gris)



Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (0, -\operatorname{sen} u, \cos u),$$
$$\mathbf{x}_v(u,v) = (1,0,0).$$

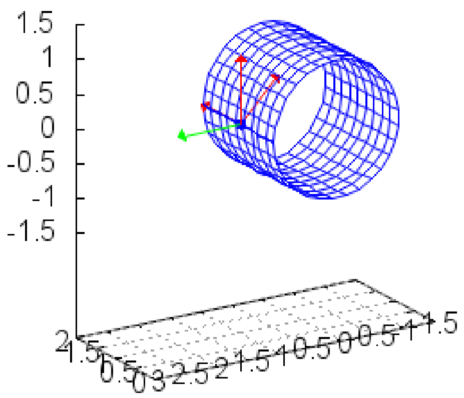
En $(1,0,1) = \mathbf{x}(1,0)$ es

$$\mathbf{x}_u(0,1) = (0,0,1), \ \mathbf{x}_v(0,1) = (1,0,0).$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(0,1) &= \frac{\mathbf{x}_u(0,1) \times \mathbf{x}_v(0,1)}{\|\mathbf{x}_u(0,1) \times \mathbf{x}_v(0,1)\|} \\ &= \frac{(0,0,1) \times (1,0,0)}{\|(0,0,1) \times (1,0,0)\|} \\ &= (0,1,0). \end{aligned}$$

Esta superficie es un cilindro cuyo eje es el eje x. Entonces, en el punto



de generalidad, podemos suponer que $v_1 = 1, v_1 = -1$ o $v_1 = 0$. Además, como los vectores tangentes a la curva son perpendiculares al vector normal $\mathbf{N}$, tenemos que $v_2 = 0$.

Si $v_1 = 0$, la ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 1, 0) + \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, v_3) \\ &= (1, 1 + \lambda, \mu v_3) .\end{aligned}$$

Para determinar la intersección de estos planos con la superficie hacemos:

$$(v, \cos u, \operatorname{sen} u) = (1, 1 + \lambda, \mu v_3) .$$

Tenemos que $v = 1$ y llamando $u = t$, obtenemos una ecuación de la curva:

$$\mathbf{x} (t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t) .$$

Es una circunferencia y es lo que podíamos esperar, ya que el vector tangente que hemos tomado es de la forma $(0, 0, v_3)$. perpendicular al eje del cilindro.

Vamos a suponer ahora que $v_1 = 1$ y el vector tangente que consideramos es $(1, 0, v_3)$. El caso $v_1 = -1$ no daría un vector tangente opuesto al que tiene $v_1 = 1$, y la curva sería la misma, en tal caso obtendríamos otra ecuación de la curva.

La ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 1, 0) + \lambda (0, 1, 0) + \mu (1, 0, v_3) \\ &= (1 + \mu v_1, 1 + \lambda, \mu v_3) .\end{aligned}$$

Para determinar la intersección de estos planos con la superficie hacemos:

$$(v, \cos u, \operatorname{sen} u) = (1 + \mu, 1 + \lambda, \mu v_3) .$$

Obsérvese que esto nos da restricciones a los valores de λ y μ, ya que debe ser $-1 \leq 1 + \lambda \leq 1$, $-1 \leq \mu v_3 \leq 1$. Podemos hacer:

$$\begin{aligned}v &= 1 + \mu \Longrightarrow \mu = v - 1, \\ \operatorname{sen} u &= \mu v_3 = (v - 1) v_3,\end{aligned}$$

porque como el punto $(1,1,0)$ corresponde a un valor del coseno positivo, podemos considerar sólo los valores positivos de la raíz cuadrada.

Pero, además, obtenemos un vector tangente a la curva en $(1,1,0) = \mathbf{x}(1)$:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, -(t-1)\, v_3^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}}, v_3\right),$$
$$\mathbf{x}'(1) = (1, 0, v_3),$$

Obsérvese que si $v_3 = 0$, tenemos una recta, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (t, 1, 0).$$

Es la recta paralela al eje del cilindro.

En la figura 32 se han representado además, en rojo, algunos vectores tangentes.

En la figura 5.6 se representaron las secciones normales en $(1,1,0)$ del cilindro de este ejemplo tomando $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ y $(-1,0,1)$ como vector (v_1, v_2, v_3).

Podemos considerar que las secciones normales (es decir, las curvas resultantes de la intersección de los planos normales en un punto P con la superficie) es una familia de curvas. Y no es complicado determinar la curvatura de cada una de las curvas de la familia en el punto base P. Para cada curva, el vector curvatura $\mathbf{k}$ es perpendicular al vector tangente a la curva. Y además, como las curvas son planas, $\mathbf{k}$ debe estar en el plano normal correspondiente. Esto significa que el vector curvatura geodésica en P es nulo, o que

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{N}.$$

Si tomamos módulos de los vectores primero y último de esta ecuación, tenemos que la curvatura de la curva es proporcional a la curvatura normal en valor absoluto (recordamos que la curvatura de una curva plana siempre es mayor o igual que 0 por definición):

$$k = |\kappa_n|.$$

Ejemplo 33. Tenemos el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v, \cos u, \operatorname{sen} u).$$

Vamos a determinar la curvatura en las secciones normales en el punto $(1, 1, 0) = \mathbf{x}(0, 1)$.

Sabemos que en $(1, 1, 0)$ el vector normal a la superficie es

$$\mathbf{N}(0, 1) = (0, 1, 0).$$

Si el otro vector director del plano normal es $(0, 0, v_3)$ entonces una ecuación de la sección normal es:

$$\mathbf{x}(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t).$$

En este caso, como la curva está parametrizada por la longitud de arco, el vector curvatura $\mathbf{k}(t)$ es la derivada segunda

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{x}''(t) = (0, -\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Particularizando en $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)$, tenemos:

$$\mathbf{k}(0) = (0, -1, 0) = -\mathbf{N}(0, 1).$$

Entonces, la curvatura normal es -1.

Estudiamos el otro caso, cuando el otro vector director del plano normal es $(1, 0, v_3)$. Entonces la ecuación de la sección normal es:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}, (t-1) v_3\right).$$

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, -(t-1) v_3^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}}, v_3\right),$$

$$\mathbf{x}'(1) = (1, 0, v_3) = (1, 0, v_3),$$

Sabemos que un vector en la dirección y sentido del vector curvatura es el vector

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \left(\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\right) \times \mathbf{x}'(1) \\
&= \big((1, 0, v_3) \times \left(0, -v_3^2, 0\right)\big) \times (1, 0, v_3) \\
&= \left(v_3^3, 0, -v_3^2\right) \times (1, 0, v_3) = \left(0, -v_3^2 - v_3^4, 0\right),
\end{aligned}$$

que tiene la misma dirección y sentido que $(0, -1, 0)$. Además, la curvatura es

$$\begin{aligned}
k(1) &= \frac{\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\|}{\|\mathbf{x}'(1)\|^3} = \frac{\|(v_3^3, 0, -v_3^2)\|}{\|(1, 0, v_3)\|^3} \\
&= \frac{v_3^2\sqrt{1 + v_3^2}}{(v_3^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v_3^2}{(v_3^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Entonces, el vector curvatura es

$$\mathbf{k}(1) = \frac{v_3^2}{(v_3^2 + 1)^2}(0, -1, 0).$$

Observamos que entonces

$$\kappa_n = -\frac{v_3^2}{(v_3^2 + 1)^2} = k.$$

Si recorremos la curva en sentido contrario, es decir, si tomamos como ecuación de la curva a

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \sqrt{1 - v_3^2(t - 1)^2}, (1 - t)v_3\right),$$

entonces ambos coeficientes coinciden. $\blacksquare$

Direcciones principales y curvaturas principales

Hemos visto que la segunda forma fundamental es una forma cuadrática es una función definida sobre un conjunto de $\mathbb{R}^3$ que está acotado y es cerrado. por eso, en este conjunto alcanza un máximo y un mínimo. Suponemos que alcanza el máximo en el vector unitario $\mathbf{e}_1 \in c$. Entonces, existe un vector $\mathbf{e}_2$ de tal forma que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base ortonormal.

Vamos a expresar la segunda forma fundamental en esta base, $II_{(u,v)}(\mathbf{x}')$, si $\mathbf{x}'$ es un vector del espacio tangente a la superficie dada por $\mathbf{x}$ en el punto $\mathbf{x}(u,v)$. Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base del espacio tangente, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_2, \\ II_{(u,v)}(\mathbf{x}') &= II_{(u,v)}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \\ &= \alpha\cos^2\theta + 2\beta\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \gamma\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

para un ángulo θ y para unos coeficientes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Consideramos ahora, para los parámetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la función dependiente de θ:

$$f(\theta) = \alpha\cos^2\theta + 2\beta\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \gamma\operatorname{sen}^2\theta.$$

Sabemos que esta función, definida para $\theta \in [0, 2\pi]$, es continua y derivable y por tanto, alcanza en este conjunto un máximo y un mínimo, que están entre los puntos donde $f'(\theta) = 0$. Además, como el máximo se alcanza en $\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1$, o $\theta = 0$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} &f'(\theta) = -2\alpha\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\beta\left(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + 2\gamma\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \\ &f'(0) = 2\beta = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$II_{(u,v)}(\mathbf{x}') = \alpha x^2 + \gamma y^2.$$

Esto significa que la matriz que da la segunda forma cuadrática, expresada en esta base, es diagonal. Pero vamos a ir más allá y a seguir utilizando que en $\mathbf{e}_1$ se alcanza un máximo absoluto. Esto significa que

$$\alpha = I_{(u,v)}(\mathbf{e}_1) \geq II_{(u,v)}(\mathbf{e}_2) = \gamma.$$

Quedándonos con $\alpha \geq \gamma$, tenemos entonces que se cumple:

$$\alpha\left(x^2 + y^2\right) \geq \alpha x^2 + \gamma y^2 \geq \gamma\left(x^2 + y^2\right)$$

Si $\alpha = \gamma$, entonces la segunda forma fundamental es constante en la circunferencia unidad c. Pero si $\alpha \neq \gamma$, entonces los extremos absolutos sólo se alcanzan en $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

Recordamos que la segunda forma fundamental aplicada a un vector unitario del espacio tangente (es decir, a $\mathbf{x}' \in c$) coincide con la curvatura normal de una curva con ese vector tangente. Entonces, vemos que la curvatura normal en un punto de una superficie o es constante o alcanza un máximo y un mínimo absoluto.

Las direcciones en las que la curvatura normal alcanza el máximo y el mínimo absoluto se llaman **direcciones principales** y los valores de la curvatura en estas direcciones se llaman **curvaturas principales**. Es habitual denotar como κ_1 y κ_2 a los valores máximos y mínimo de la curvatura.

Si la segunda forma fundamental en un punto $\mathbf{x}(u, v)$ es constante en todos los vectores de la circunferencia unidad c, entonces las curvaturas principales son constantes ($\kappa_1 = \kappa_2$) y no existen direcciones principales. En ese caso, se dice que el punto $\mathbf{x}(u, v)$ es un **punto umbílical**.

Volvamos a la segunda forma fundamental. Sabemos que en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una matriz diagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, su determinante es

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

que se llama **curvatura de Gauss**. En el apartado 6.4 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014, se da una interpretación geométrica a esta curvatura.

Su traza es la **curvatura media**:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Más adelante veremos la interpretación geométrica de estos dos importantes parámetros.

Ahora vamos a encontrar cómo determinar las direcciones principales y las curvaturas principales de una superficie.

Vamos a suponer que ni $\mathbf{x}_u$ ni $\mathbf{x}_v$ son direcciones principales y que no estamos en un punto umbilical. Llamando $m = \frac{u'}{v'}$, resulta:

$$\kappa_n = \frac{e\left(\dfrac{u'}{v'}\right)^2 + 2f\dfrac{u'}{v'} + g}{E\left(\dfrac{u'}{v'}\right)^2 + 2F\dfrac{u'}{v'} + G} = \frac{em^2 + 2fm + g}{Em^2 + 2Fm + G}.$$

De nuevo, debe ser

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\kappa_n(m)}{dm} = 2\frac{(em+f)\left(E+2Fm+Gm^2\right) - (Em+F)\left(e+2fm+gm^2\right)}{\left(E+2Fm+Gm^2\right)^2} \\ &= 2\frac{em+f}{E+2Fm+Gm^2} - 2\frac{(Em+F)\,\kappa_n}{E+2Fm+Gm^2}. \end{aligned}$$

Por esto, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} 0 &= em + f - (Em+F)\,\kappa_n \\ &\Longrightarrow 0 = eu' + fv' - (Eu' + Fv')\,\kappa_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Si hacemos lo mismo, pero con $m = \frac{v'}{u'}$, tenemos:

$$\kappa_n(m) = \frac{e + 2f\dfrac{v'}{u'} + g\left(\dfrac{v'}{u'}\right)^2}{E + 2F\dfrac{v'}{u'} + G\left(\dfrac{v'}{u'}\right)^2} = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2}.$$

Entonces, en la dirección principal, al alcanzarse un extremo, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\kappa_n(m)}{dm} = \frac{(2f+2gm)\left(E+2Fm+Gm^2\right) - (2F+2Gm)\left(e+2fm+gm^2\right)}{\left(E+2Fm+Gm^2\right)^2} \\ &= 2\frac{f+gm}{E+2Fm+Gm^2} - 2\frac{(F+Gm)\,\kappa_n}{E+2Fm+Gm^2} \\ &\Longrightarrow 0 = fu' + gv' - (Fu' + Gv')\,\kappa_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que escribimos de

Como la primera forma fundamental cumple que su determinante es distinto de 0, podemos hacer

$$II\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_n I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow I^{-1}II\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_n \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Esto significa que (u', v') es un autovector de $I^{-1}II$, con autovalor κ_n.Observamos que las curvaturas principales son los autovalores de

$$I^{-1}II = k\mathbf{Id} \Longleftrightarrow II = kI \Longleftrightarrow II - kI = \mathbf{0}.$$

Por eso, buscamos k tal que

$$\begin{aligned} 0 = \det(II - kI) &= \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) \\ &= k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\,k - f^2 + eg. \end{aligned} \tag{6}$$

Esta ecuación se llama **ecuación de las curvaturas principales**.

Observemos de nuevo la ecuación 5: si las dos formas fundamentales son proporcionales, entonces $\kappa_1 = \kappa_2$ y el punto es umbilical. Si el punto es plano, entonces la segunda forma fundamental es nula, y $\kappa_n = 0$ en cualquier dirección, por lo que $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Ejemplo 34. La ecuación de un plano es $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a} + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$, con $\mathbf{a}, \mathbf{b}, c$ constantes.Entonces

$$\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} = 0,$$

y entonces

$$e = f = g = 0.$$

Por eso, $k_n = 0$ y todos los puntos son umbílicos. ∎

Ejemplo 35. Vamos a determinar las curvaturas principales de un punto de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

Es una ecuación de segundo grado, por lo que su solución es:

$$\begin{aligned} k &= \frac{-2R^3 \operatorname{sen}^2\phi \pm \sqrt{\left(2R^3 \operatorname{sen}^2\phi\right)^2 - 4R^4 \operatorname{sen}^2\phi R^2 \operatorname{sen}^2\phi}}{2R^4 \operatorname{sen}^2\phi} \\ &= \frac{-2R^3 \operatorname{sen}^2\phi}{2R^4 \operatorname{sen}^2\phi} = -\frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Entones la esfera tiene única curvatura principal:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R}$$

y todas las direcciones son principales. Observamos que las formas fundamentales son proporcionales, la curvatura normal es constante y todos los puntos son umbilicales. ∎

Volvamos a la ecuación 6. Sabemos que $EG-F^2 = \det(I) \neq 0$ y, entonces, podemos buscar las soluciones de:

$$k^2 - \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Analizamos esta ecuación de segundo grado. Sabemos que si.tiene dos soluciones reales, κ_1 y κ_2, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} &= \kappa_1 + \kappa_2 \Longrightarrow H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2\left(EG - F^2\right)}, \\ \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= \kappa_1\kappa_2 \Longrightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Hemos encontrado una expresión de las curvatura de Gauss y media a partir de los coeficientes de las formas fundamentales.

Ejemplo 36. Vamos a determinar la curvatura de Gauss y la curvatura media de la esfera.

Tenemos que la curvatura normal es constante y vale $\kappa_1 = -\frac{1}{R}$. Entonces la curvatura de Gauss K y la curvatura normal H son:

Nos queda por saber cómo cálcular las direcciones principales. Sabemos que son los autovectores de las direcciones principales, es decir, son los vectores (u', v') para los que

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

para $i = 1, 2$. Como nos interesa la dirección, vamos a suponer que es de la forma (h, mh), con $h = u', m = \frac{v'}{u'}$, supuesto $u' \neq 0$. Esta restricción no supone ninguna restricción, ya que las dos direcciones principales son ortogonales y, entonces, al menos una de las coordenadas u', v' es distinta de 0.

Esta condición es equivalente a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} e + fm \\ f + gm \end{pmatrix} = \kappa_i \begin{pmatrix} E + Fm \\ F + Gm \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \\ \begin{cases} e + fm = \kappa_i (E + Fm), \\ f + gm = \kappa_i (F + Gm). \end{cases} \end{aligned}$$

Recordamos que queremos calcular el valor de m, y a ser posible, sin tener que determinar antes κ_i. por eso, hacemos:

$$\kappa_i = \frac{e + fm}{E + Fm} = \frac{f + gm}{F + Gm}.$$

A partir de la última igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} (e + fm)(F + Gm) = (f + gm)(E + Fm) &\Longleftrightarrow \\ (fG - gF) m^2 + (eG - gE) m + eF - fE = 0. \end{aligned}$$

Se puede escribir en forma del determinante:

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

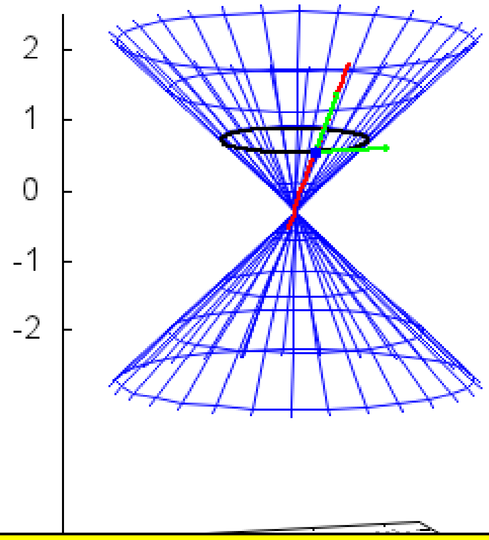
La superficie es un cono. En un entorno de $(1,0,1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$. Entonces (se hace en los ejercicios), los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$ son:

$$\begin{array}{lll} E = 2, & F = 0, & G = 1, \\ e = 0, & f = 0, & g = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

La dirección (h, hm) es principal si verifica la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \\ &= -m\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, una dirección principal es $(1,0)$. La otra dirección principal es perpendicular a ella y es la dirección $(0,1)$. En la siguiente figura se representan (en verde) estas direcciones principales, que son las direcciones, por ejemplo, de una circunferencia y una recta.



Líneas de curvatura y líneas asintóticas

El último ejemplo muestra un cono y las direcciones principles en él en el punto $(1,0,1)$. En la figura, hemos representado una circunferencia, cuya tangente en este punto coincide con una de las direcciones principales. Puede haber otras curvas que tengan esta dirección en $(1,0,1)$. Sin embargo, la circunferencia cumple que en cada uno de sus punto, el vector tangente coincide con la dirección principal. En este apartado, nos vamos a ocupar de curvas con esta propiedad. Estas curvas se llaman **líneas de curvatura**.

Suponemos que no tenemos puntos umbilicales. Para determinar la ecuación de las líneas de curvatura en P, partimos de las ecuaciones de las direcciones principales, 3 y 4. Si despejamos κ_n en ambas igualdades e igualamos los valores que obtenemos, resulta:

$$\frac{eu' + fv'}{Eu' + Fv'} = \frac{fu' + gv'}{Fu' + Gv'}.$$

Operando llegamos a

$$(eu' + fv')\,(Fu' + Gv') = (fu' + gv')\,(Eu' + Fv') \Longrightarrow$$
$$eF(u')^2 + eGu'v' + fFu'v' + fG(v')^2 = fE(u')^2 + fFu'v' + gEv'u' + gF(v')^2.$$

Esto es lo mismo que escribir

$$(eF - fE)\,(du)^2 + (eG - gE)\,dudv + (fG - gF)\,(dv)^2 = 0.$$

Es la **ecuación diferencial de las líneas de curvatura** y su solución es una línea de curvatura. Por cada punto no umbilical pasan dos líneas de curvaturas que son, obviamente, ortogonales.

Ejemplo 38. Vamos a determinar las líneas de curvatura en el punto $(1,0,1)$ de la superficie dada por la ecuación $z^2 = x^2 - y^2$.

Como ya vimos, es un cono y cerca de $(1,0,1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}\,(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$ y los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$ son:

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$
$$e = 0, \quad f = 0, \quad g = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esto es lo mismo que $dudv = 0$ y entonces debe ser

$$du = 0 \text{ o } dv = 0.$$

Si $du = 0$, entonces $u = c \in \mathbb{R}$. Como la curva pasa por $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$, se cumple $u = 1$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = \left(1, t, \sqrt{1^2 - t^2}\right).$$

Es la ecuación de una circunferencia.

La condición $dv = 0$ implica que debe ser constante v. Como en este punto $v = 0$, la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (u, 0, u),$$

que es una recta.

Las líneas de curvatura son las curvas representadas en la figura 37. $\blacksquare$

Hay otro tipo de direcciones destacadas. En un punto P de una superficie una **dirección asintótica** es aquella en donde la curvatura normal en el punto es 0. Una **línea asintótica** es una curva contenida en una superficie si la curvatura normal de cada punto es 0. Observamos que podemos asegurar que hay direcciones asintóticas, para puntos no umbilicales, si la curvatura de Gauss es negativa,. En ese caso:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 < 0 \Longrightarrow \kappa_1 < 0 < \kappa_2.$$

Entonces, hay dos direcciones perpendiculares donde la curvatura normal tiene distinto signo, en particular, entre dos vectores que llamamos $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ que forma un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Entonces, en una vector (u', v') que forma un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ radianes con los anteriores, se anula la segunda forma fundamental, porque

$$\kappa_n = \frac{II(u', v')}{I(u', v')} = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Pero la segunda forma fundamental, también se anula en un vector que forma un ángulo menor de $\frac{\pi}{2}$ radianes con $\mathbf{u}_2$ y $-\mathbf{u}_1$. Es decir, hay dos direcciones

Ejemplo 39. Vamos a determinar las líneas asintóticas, si las hay, en el punto $(1,0,1)$ de la superficie dada por la ecuación $z^2 = x^2 - y^2$.

Sabemos que cerca de $(1,0,1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$ y los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$ son:

$$\begin{array}{lll} E = 2, & F = 0, & G = 1, \\ e = 0, & f = 0, & g = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

La ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$\begin{aligned} e\,(du)^2 + 2f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = 0 &\iff \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(dv)^2 = 0. \end{aligned}$$

Para que se cumpla, debe ser:

$$dv = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = c$$

para constantes c. Cono se busca la línea asintótica que pasa por $(1,0,1) = \mathbf{x}(1,0)$, se cumple $v = 0$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (t, 0, t)\,.$$

Es la ecuación de una recta, y coincide con una línea de curvatura. ∎

Vamos a terminar relacionando las direcciones asintóticas con el tipo de punto que tenemos. Observando la ecuación diferencial de las líneas asintóticas, vemos que se puede reescribir como

$$e\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f\frac{du}{dv} + g = 0.$$

Ahora consideramos la ecuación de segundo $ex^2 + 2fx + g = 0$. A partir del signo del discriminante de esta ecuación, sabemos que la ecuación tiene dos soluciones si $f^2 - eg > 0$, una solución si $f^2 - eg = 0$ y ninguna si $f^2 - eg < 0$. Lo mismo ocurre para la ecuación diferencial.

En un punto elíptico, la segunda forma fundamental está definida positiva y la curvatura normal nunca es 0, por eso, no hay líneas asintóticas. La y hay dos direcciones asintóticas.

En un punto parabólico, $eg - f^2 = 0$. Por ese punto pasa una única dirección asintótica. Su ecuación se reduce a

$$(Adu + Bdv)^2 = 0.$$

Si el punto es plano, entonces $e = f = g = 0$ y todas las direcciones son asintóticas.

Ejemplo 40. Sabemos, por un ejemplo anterior, que el punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0)$ es hiperbólico en la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\sqrt{1+u^2}\cos v, \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{sen}\, v, u\right).$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu}(0,0)\cdot\mathbf{N}(0,0) = (1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1, \\ f &= \mathbf{x}_{uv}(0,0)\cdot\mathbf{N}(0,0) = (0,0,1)\cdot(1,0,0) = 0, \\ g &= \mathbf{x}_{vv}(0,0)\cdot\mathbf{N}(0,0) = (-1,0,0)\cdot(1,0,0) = -1. \end{aligned}$$

Vamos a determinar las direcciones asintóticas. La ecuación diferencial es:

$$(du)^2 - g(dv)^2 = 0.$$

Podemos escribirla como

$$(du - dv)(du + dv) = 0.$$

Tenemos pues dos ecuaciones diferenciales:

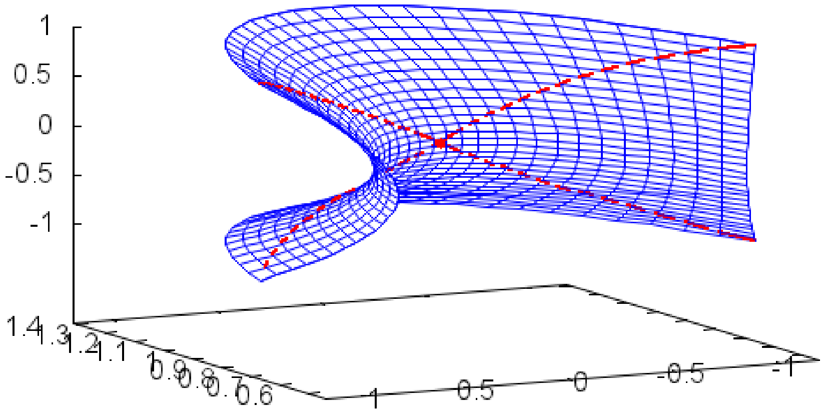
$$\begin{aligned} du - dv &= 0, \\ du + dv &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones son:

$$\begin{aligned} u &= v + c_1, \\ u &= -v + c_2. \end{aligned}$$

Como se cumple $u = v = 0$, la dirección de las líneas asintóticas es:

$$u = v, u = -v.$$



5.7. Teorema egregio de Gauss

Se debe estudiar en el apartado 6.5 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

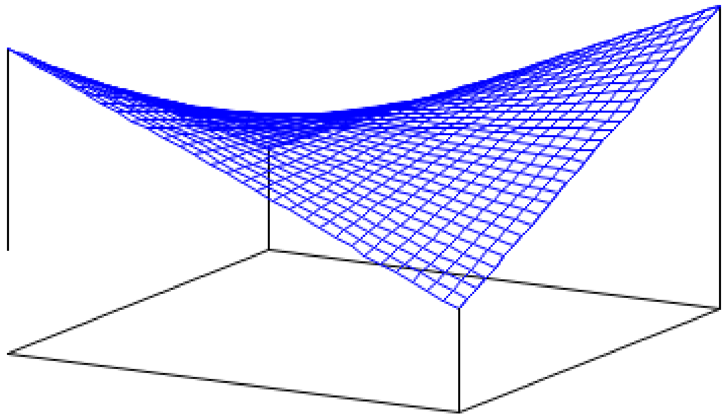
Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Superficies

Ejercicios

Versión 1.0

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED



1. Ejercicio 190 de la página 83 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, enero 2014.

   Demuéstrese que la superficie anterior coincide efectivamente con el hiperboloide $z = xy$.

   Solución. Teníamos la superficie de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}\,(u,v) = (1-v)\,(u,0,0) + v(u,1,u) = (u,v,uv).$$

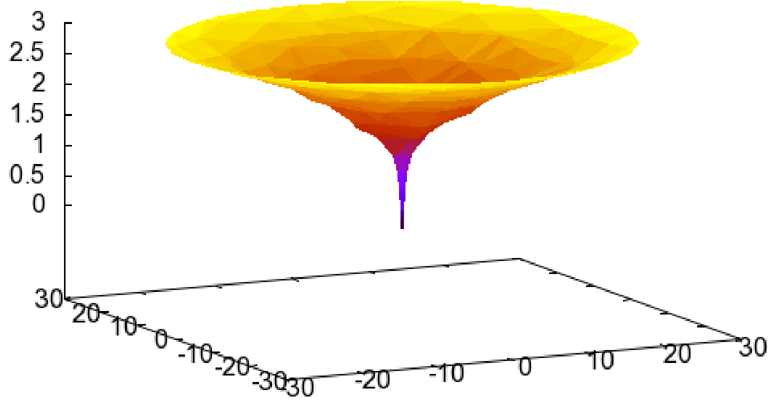
   Hay que comprobar que si

$$x = u, y = v, z = uv$$

   se cumple $z = xy$. Pero eso es obvio.

   La gráfica de esta superficie es

2. Determínense las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución generada por la curva $x = u^3 + 1$, $y = 0$, $z = u$, $0 < u < 3$, al girar alrededor del eje $0z$.



Pero además, los puntos que están en la superficie y que tienen la misma coordenada z deben estar a la misma distancia del eje z, lo que significa que debe ser

$$x^2 + y^2 = \left(u^3 + 1\right)^2 = \left(z^3 + 1\right)^2.$$

Por eso, la ecuación implícita de la superficie es

$$x^2 + y^2 = (z^3 + 1)^2.$$

Las ecuaciones paramétricas se deducen considerando a z como parámetro y multiplicando por $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, al estar generada al girar una recta alrededor de uno de los coordenados. Así, tenemos:

$$\begin{array}{l} x = (u^3 + 1)\cos\theta \\ y = (u^3 + 1)\operatorname{sen}\theta \quad 0 < u < 3,\ 0 < \theta < 2\pi \\ \quad z = u \end{array}$$

Solución. La generatriz es la recta y la directriz es la curva. Comprobamos que está en el plano normal a la recta. Como $(0, 1, 1)$ es un vector director de la curva, entonces la ecuación del plano normal es

$$y + z = 0.$$

Los puntos de la curva lo cumplen, porque

$$0 \cdot t^2 + t - t = 0.$$

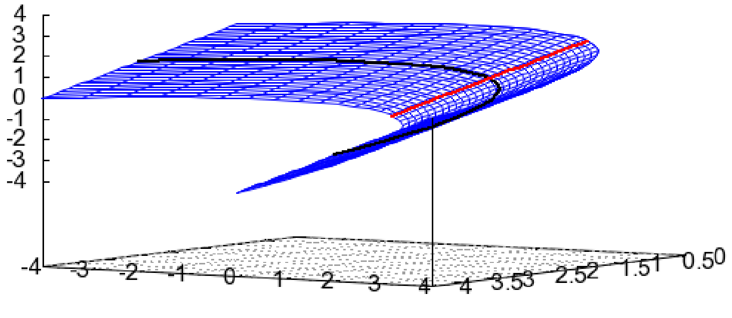
Nos falta una parametrización de la recta, que es

$$\alpha(u) = (0, u, u),$$

y un punto común, que es $(0, 0, 0) = \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0)$. La ecuación de la superfice de traslación es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(u) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= \left(t^2, t, -t\right) + (0, u, u) - (0, 0, 0) \\ &= \left(t^2, t + u, -t + u\right). \end{aligned}$$

Es un cilindro parabólico:



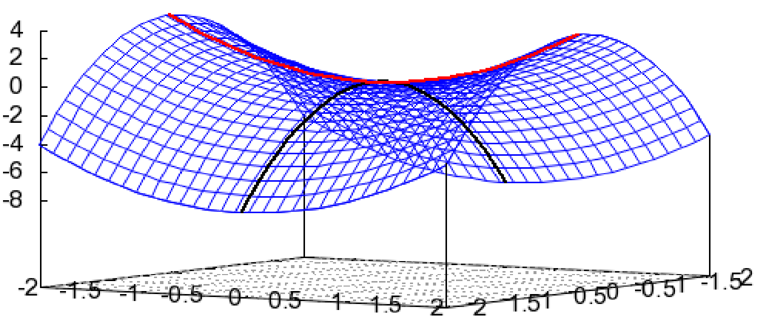
Solución. La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = \left(0, u, u^2\right), \mathbf{x}_2(t) = \left(t, 0, -2t^2\right).$$

Un punto común es $(0,0,0) = \mathbf{x}_1(0,0,0) = \mathbf{x}_2(0,0,0)$. La ecuación del paraboloide hiperbólico es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,\theta) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= \left(0, u, u^2\right) + \left(t, 0, -2t^2\right) - (0,0,0) \\ &= \left(t, u, u^2 - 2t^2\right). \end{aligned}$$

Su gráfica es



5. Estudie si la parametrización

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = u^2 + v^2$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución. Si $\mathbf{x}(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$, entonces

6. Sea la superficie $x = uv + 1, y = uv^2 - 2, z = u^2 + uv^3$ y M el conjunto de sus puntos singulares. Determínese M.

   Solución. Tenemos:

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(uv + 1, v^2 u - 2, u^2 + uv^3\right).$$

   Entonces
$$\mathbf{x}_u = \left(v, v^2, 2u + v^3\right), \ \mathbf{x}_v = (u, 2uv, 3uv^2).$$

   Si hacemos

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & v^2 & 2u + v^3 \\ u & 2uv & 3uv^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (uv(v^3 - 4u), 2uv(u - v), uv^2),$$

   tenemos que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ sólo se anula si $u = 0$ o $v = 0$. Por eso, M es la imagen de las rectas $u = 0, v = 0$. Este conjunto es:

$$\mathbf{x}(0,v) = (1, -2, 0), \quad \mathbf{x}(u,0) = (1, -2, 0).$$

   Por tanto, M es un único punto.

7. Calcule la ecuación del plano tangente a la superficie M dada por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ para $z > 0$, en el punto donde $x = 4, y = 3$.

   Solución. Primero determinamos la ecuación paramétrica de la superficie. La superficie M es un cono con $z > 0$, o son los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ donde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, una parametrización es

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

   El punto donde tenemos que determinar el plano tangente es donde $u = 4, v = 3$, es decir,

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

   En este punto, tenemos

Un vector perpendicular a ambos es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(4,3)\times\mathbf{x}_v(4,3) &= \left(1,0,\frac{4}{5}\right)\times\left(0,1,\frac{3}{5}\right)\\ &= \left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},1\right).\end{aligned}$$

Si tomamos un punto genérico de $\mathbb{R}^3$, (x,y,z), el vector $(x-4,y-3,z-5)$ está en el plano tangente si y sólo si:

$$\begin{aligned}(x-4,y-3,z-5)\cdot\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},1\right)=0 &\iff -4(x-4)-3(y-3)+5(z-5)=0\\ &\iff -4x-3y+5z=0.\end{aligned}$$

Esta es la ecuación del plano tangente que buscábamos.

8. Ejercicio 193 de la página 86 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, enero 2014.

   Calcúlense las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente a la superficie

   $$\mathbf{x}(u,v)=(u,v,uv)$$

   en el punto $(1,-1,-1)$.

   Solución. Tenemos que $\mathbf{x}(1,-1)=(1,-1,-1)$. Además:

   $$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v)&=(1,0,v), & \mathbf{x}_u(1,-1)&=(1,0,-1),\\ \mathbf{x}_v(u,v)&=(0,1,u), & \mathbf{x}_v(1,-1)&=(0,1,1).\end{aligned}$$

   El plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1,1)=(1,-1,-1)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1,1)$ y $\mathbf{x}_v(1,1)$, es decir, su ecuación implícita es:

   $$0=\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=x-y+z-1,$$

   o $x-y+z=1$. La ecuación paramétrica es

Encuéntrese los puntos de la superficie

$$\mathbf{x}(u,v) = (u-v, u+v, u^2+v^2)$$

en los que el plano tangente es paralelo al plano $x-y+z=0$.

Solución. Como

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (1,1,2u), \ \mathbf{x}_v(u,v) = (-1,1,2v),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) = (1,1,2u) \times (-1,1,2v) \\ &= (2v-2u, -2u-2v, 2), \end{aligned}$$

que es paralelo al vector $(v-u, -u-v, 1)$. Y ambos son perpendiculares al plano tangente.

Por otro lado, un vector perpendicular al plano $x-y+z=0$ es $(1,-1,1)$. Para que los dos planos sean paralelos debe cumplirse

$$\begin{aligned} &(v-u, -u-v, 1) = k(1,-1,1) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow k=1, v-u=1, u+v=1. \end{aligned}$$

Esto se cumple cuando $v=1, u=0$, es decir en el punto

$$\mathbf{x}(0,1) = (-1,1,1).$$

10. Determinar el vector tangente al paralelo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 es

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para $\theta \in (0,2\pi), \phi \in (0,\pi)$.

Solución. La parametrización es

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Lo comprobamos con la igualdad

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)).$$

En este caso, es

$$u(t) = t, \quad v(t) = \frac{\pi}{4},$$
$$\mathbf{x}_y(\theta, \phi) = (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0).$$

Entonces

$$u'(t) = 1, \quad v'(t) = 0.$$

Y tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \\
&= \mathbf{x}_u\left(t, \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \left(-\operatorname{sen} t \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \cos t \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 0\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, 0\right).
\end{aligned}$$

11. Determínense los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie dada por

$$x = u\cos v; y = u\operatorname{sen} v; z = u^2$$

en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(u, v) &= \left(u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2\right), \\
\mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), \\
\mathbf{x}_v(u, v) &= (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0).
\end{aligned}$$

A partir de estos valores, hacemos:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \\ &= \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\ &= -u \cos v \operatorname{sen} v + u \cos v \operatorname{sen} v \\ &= 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\ &= (-u \operatorname{sen} v)^2 + (u \cos v)^2 \\ &= u^2. \end{aligned}$$

El punto $(1, 0, 1)$ se corresponde con los valores de $u = 1; v = 0$; con lo que

$$E = 5,\ F = 0,\ G = 1.$$

12. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Determínense los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: En un punto $\mathbf{x}(u, v)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, a). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1. \end{aligned}$$

13. Tenemos un cono dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, av),$$

para $u \in [-\pi,\pi], v \in \mathbb{R}$.

Determínenese los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: Determinamos los coeficientes de la primera forma fundamental. En un punto $\mathbf{x}(u,v)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0),\\ \mathbf{x}_v &= (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u\\ &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\\ &= v^2\cos^2 u + v^2\,\mathrm{sen}\,^2 u = v^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\\ &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\\ &= (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a)\cdot(\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a)\\ &= a^2 + \cos^2 u +\ \mathrm{sen}\,^2 u = a^2+1.\end{aligned}$$

14. Tenemos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $(0,R,0)$, las curvas contenidas en la esfera y que pasan por este punto, dadas por

Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto $\mathbf{x}(\theta,\phi)$ son

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\theta=R^2\operatorname{sen}^2\phi,\\F&=\mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\phi=0\\G&=\mathbf{x}_\phi\cdot\mathbf{x}_\phi=R^2.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta&=(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\,,\\\mathbf{x}_\phi&=(R\cos\theta\cos\phi,R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-R\operatorname{sen}\phi)\,,\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\theta\theta}&=(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,0)\,,\\\mathbf{x}_{\theta\phi}&=(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,R\cos\theta\cos\phi,0)\,,\\\mathbf{x}_{\phi\phi}&=(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,-R\cos\phi)\,.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B:

$$\begin{aligned}A&=(\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\theta+2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta+(\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta\\&=(\theta')^2\,(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,0)\cdot(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\\&+2\theta'\phi'\,(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,R\cos\theta\cos\phi,0)\cdot(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\\&+(\phi')^2\,(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,-R\cos\phi)\cdot(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\\&=R^2\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi,\\B&=(\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\phi+2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi+(\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi\\&=(\theta')^2\,(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,0)\cdot(R\cos\theta\cos\phi,R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-R\operatorname{sen}\phi)\\&+2\theta'\phi'\,(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,R\cos\theta\cos\phi,0)\cdot(R\cos\theta\cos\phi,R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-R\operatorname{sen}\phi)\\&+(\phi')^2\,(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,-R\cos\phi)\cdot(R\cos\theta\cos\phi,R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-R\operatorname{sen}\phi)\\&=-\frac{1}{2}R^2(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi.\end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

Para el punto $(0, R, 0) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escribir la curva $\mathbf{c}_1(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, 0)$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1(t) &= (R\cos t, R\operatorname{sen} t, 0)\\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(t, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\theta(t) = t,\ \phi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\begin{array}{ll}\phi'(t) = 0, & \phi''(t) = 0,\\ \theta'(t) = 1, & \theta''(t) = 0.\end{array}$$

La ecuación de las geodésicas es

$$\left\{\begin{array}{l}0 = 0 + 1\cdot 0\cdot\ \operatorname{sen} 2\phi(t),\\ 0 = 0 - \frac{1}{2}(1)^2\operatorname{sen} 2\phi(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi.\end{array}\right.$$

Como estas igualdades son ciertas, entonces esta línea (corresponde al ecuador) es una geodésica.

Procedemos igual para $\mathbf{c}_2(t) = (0, R\cos t, R\operatorname{sen} t)$. En esta curva, es

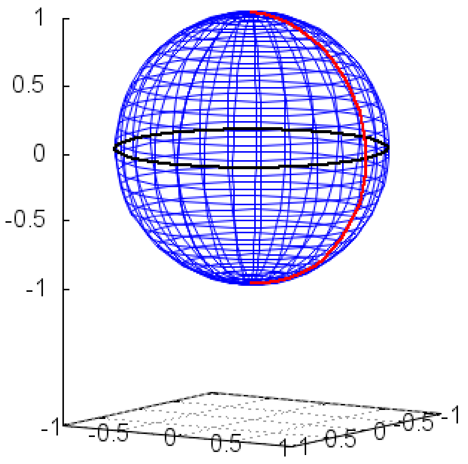
$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2(t) &= (0, R\operatorname{sen} t, R\cos t)\\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right)\\ &\Longrightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{2},\ \phi(t) = t.\end{aligned}$$

Para estas funciones, tenemos:

$$\begin{array}{ll}\phi'(t) = 1, & \phi''(t) = 0,\\ \theta'(t) = 0, & \theta''(t) = 0,\end{array}$$

y la ecuación de las geodésicas queda reducida a

$$\left\{\begin{array}{l}0 = \theta''\operatorname{sen}^2\phi + \theta'\phi'\operatorname{sen} 2\phi,\\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2\operatorname{sen} 2\phi.\end{array}\right.$$



15. Tenemos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización
$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$
para $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$, la curvas contenida en la esfera dadas por
$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) &= \left(R\cos t\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, R\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, R\cos\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}R\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\end{aligned}$$
y que pasa por este punto es una geodésica.

Solución: Tenemos que comprobar que verifica la ecuación de las geodésicas, que es para esta superficie:

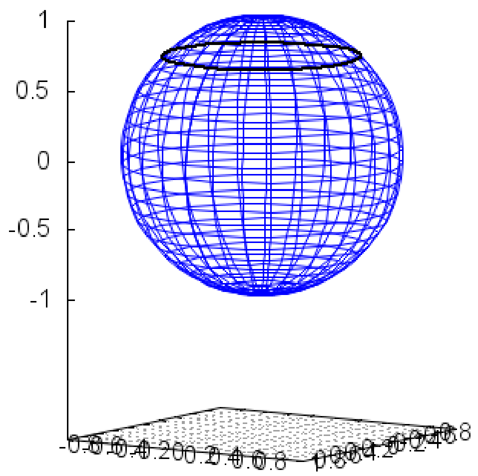
Por eso:

$$\phi'(t) = 0, \quad \phi''(t) = 0,$$
$$\theta'(t) = 1, \quad \theta''(t) = 0.$$

Deben ser 0 las dos expresiones siguientes:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \cdot \operatorname{sen}^2\phi + 1 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 2\phi = 0, \\ a_2 = 0 - \frac{1}{2}1^2 \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0. \end{cases}$$

por tanto, esta curva no es una geodésica. Esta curva es un paralelo, que se representa a continuación:



16. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Estudíense cuáles son las geodésicas en el punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0)$, si el vector tangente a la geodésica es el vector (u_1, v_1).

Además, como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\,, \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, a)\,, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)\,, \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0)\,, \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B:

$$\begin{aligned} A &= (u')^2 (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &\quad + 2u'v' (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) + (v')^2 (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &= 0, \\ B &= (u')^2 (-\cos u - \ \operatorname{sen} u, 0) \cdot (0,0,1) \\ &\quad + 2u'v' (0,0,0) \cdot (0,0,1) + (v')^2 (0,0,0) \cdot (0,0,1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 = u'', \\ 0 = a^2 v''. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son las del punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$. Entonces, por el enunciado, es

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & v(0) &= 0, \\ u'(0) &= u_1, & v'(0) &= v_1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, tenemos

$$u(t) = k_1 t + c_1$$

Por eso, es:

$$(u(t), v(t)) = (k_1 t, v_1 t).$$

Las geodésicas son las curvas

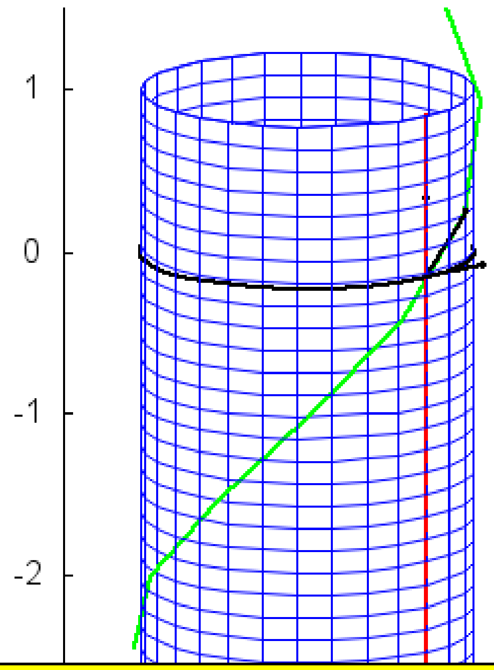
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = (\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, a v_1 t).$$

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(0, v_1)$, entonces la geodésica es la recta paralela al eje z que pasa por $(1,0,0)$dada por $(1, 0, a v_1 t)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(u_1, 0)$, entonces la geodésica es la circunferencia de radio 1 contenida en un plano paralelo al plano xy que pasa por $(1,0,0)$. Está ada por $(\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, 0)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma (u_1, v_1), entonces la geodésica una hélice contenida en el cilindro de ecuación$(\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, a v_1 t)$.

Se representan en la siguiente figura, junto con los vectores tangente a la curva:



Hemos elegido el punto $(1,0,0)$, pero este resultado se puede extrapolar a cualquier punto, es decir, las únicas geodésicas del cilindro son rectas paralelas a su eje, circunferencias perpendiculares a él y hélices.

17. Consideramos la imagen de la curva

$$\mathbf{x}(t) = (\theta(t), \phi(t)) = \left(\ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right), \frac{\pi}{2} - t\right), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

sobre la esfera de radio uno dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi,\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. Determínese su longitud.

Solución. Conocemos los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{sen}^2\phi, \\ F &= 0, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Además, para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}\left(\left(1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}, \\ \phi'(t) &= -1. \end{aligned}$$

Entonces

La longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(E\left(\theta'\right)^2 + 2F\theta'\phi' + G\left(\phi'\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \sqrt{2}\, t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

18. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}\left(u, v\right) = \left(v\cos u, v \operatorname{sen} u, v\right)$$

para $v > 0, 0 < u < \pi$. Sea $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. ¿Cuál es el ángulo que forman las curvas parámetro en este punto?

Solución: Las curvas parámetro son

$$\begin{array}{llll} x = \cos u, & y = \operatorname{sen} u, & z = 1, & 0 < u < \pi, \\ x = v\cos\frac{\pi}{2} = 0, & y = v\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = v, & z = v, & v > 0. \end{array}$$

Sabemos que

$$E = v^2, F = 0, G = 2.$$

Los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (0, 1, 0)\,, \quad \|\mathbf{u}_1\| = 1, \\ \mathbf{u}_2 &= (1, 0, 1)\,, \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

son tangentes a las curvas parámetro por el punto $(0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Además, $E = 1, F = 0, G = 2, \mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_u$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_v$.Por tanto, el ángulo que forman es

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{u_1u_2E + \left(u_1v_2 + u_2v_1\right)F + v_1v_2G}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{u}_2\|} \\ &= \frac{1\cdot 0\cdot 1 + (1\cdot 1 + 0\cdot 0)\,0 + 0\cdot 1\cdot 1}{1\sqrt{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. Vamos a determinar el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \theta_1 = \pi$. ¿Cuál es el área de la esfera?

Solución. Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:

$$E = \operatorname{sen}^2\phi, \; F = 0, \; G = 1.$$

Entonces es:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{sen}\phi,$$

para la región considerada. Entonces, el área es:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG - F^2} d\phi d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos\phi|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \, \theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Si queremos calcular el área de la esfera, hacemos

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos\phi|_0^{\pi} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos\pi + \cos 0) \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2 \, \theta|_0^{2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

Solución. La aplicación $\mathbf{x}(u,v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (2u, 2u, 1),$$
$$\mathbf{x}_v(u,v) = (-2v, 2v, 0).$$

Los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario $\mathbf{N}$ y las derivadas segundas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{N}$. Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 1 \\ -2v & 2v & 0 \end{vmatrix} = (-2v, -2v, 8uv) = -2v(1, 1, -4u)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{(-2v)^2\left(1^2 + 1^2 + (-4u)^2\right)} = 2v\sqrt{2 + 16u^2},$$
$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} &= \frac{-2v(1,1,-4u)}{2v\sqrt{2+16u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2+16u^2}}\right). \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\mathbf{x}_{uu} = (2, 2, 0),$$
$$\mathbf{x}_{vv} = (-2, 2, 0),$$
$$\mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0).$$

Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned} e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{u\,u} &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u) \cdot (2,2,0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-2-2) = -\frac{4}{\sqrt{2+16u^2}}, \end{aligned}$$

21. Sea T el toro de ecuaciones

$$x = (4 + \operatorname{sen} u)\cos v,$$
$$y = (4 + \operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v,$$
$$z = \cos u.$$

a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

b) Clasifique sus puntos.

Solución. La aplicación $\mathbf{x}(u,v) = ((4+\operatorname{sen} u)\cos v, (4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos u)$ es una parametrización del toro en un entorno de cada uno de sus puntos seleccionando un abierto D adecuado para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico $\mathbf{x}(u,v)$:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (\cos u\cos v, \cos u\operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u),$$
$$\mathbf{x}_v(u,v) = (-(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, (4+\operatorname{sen} u)\cos v, 0).$$

Para clasificar el punto, tenemos que calcular los coeficientes$L$, M y N de la segunda forma fundamental a partir del vector normal unitario $\mathbf{n}$ y las derivadas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u\cos v & \cos u\operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v & (4+\operatorname{sen} u)\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= (4+\operatorname{sen} u)\left(\cos v\operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos u\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v\cos u\right) \\
&= (4+\operatorname{sen} u)(\cos v\operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos u),\\
\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(4+\operatorname{sen} u)^2\left((\cos v\operatorname{sen} u)^2 + (-\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u)^2 + \cos^2 u\right)} \\
&= (4+\operatorname{sen} u)\sqrt{\cos^2 v\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u} \\
&= (4+\operatorname{sen} u),\\
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = (\cos v\operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos u).
\end{aligned}$$

entonces los coeficientes son:

$$
\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u} = (\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u)\cdot(-\operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u)\\
&= -\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v - \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u = -1,\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,v} = (\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u)\cdot(-\cos u \operatorname{sen} v, \cos u\cos v, 0)\\
&= -\operatorname{sen} u\cos v\cos u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u\cos v\cos u \operatorname{sen} v = 0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{v\,v} = (\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u)\cdot(-(4+\operatorname{sen} u)\cos v, -(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, 0)\\
&= -\left(\operatorname{sen} u\cos^2 v\right)(4+\operatorname{sen} u) - \left(\operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u\right)(4+\operatorname{sen} u) =\\
&= -\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)\,.
\end{aligned}
$$

Por es

$$eg - f^2 = -1\,(-\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)) - 0 = \operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)\,.$$

Como $\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)$ es una función continua, además se cumple que

$$eg - f^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{sen} u = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad u = \pi, 0,$$

y en $\frac{\pi}{2}$ tenemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(4+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) > 0$, entonces:

- Si $0 < u < \pi$, entonces $\mathbf{x}(u,v)$ es elíptico,
- Si $\pi < u < 2\pi$, entonces $\mathbf{x}(u,v)$ es hiperbólico,
- Si $u = 0$ o $u = \pi$, entonces $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, por lo que es parabólico.

22. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v)\,.$$

Determínense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1,0,0)$ de la hélice dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, t)\,.$

Solución: Determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(1,0) &= \frac{\mathbf{x}_u(1,0)\times\mathbf{x}_v(1,0)}{\|\mathbf{x}_u(1,0)\times\mathbf{x}_v(1,0)\|}\\ &= \frac{(0,1,0)\times(0,0,1)}{\|(0,1,0)\times(0,0,1)\|}\\ &= (1,0,0)\,.\end{aligned}$$

Ahora parametrizamos la hélice por la longitud de arco. Como $\mathbf{x}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, t)$, entonces

$$\mathbf{x}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\,, \quad \|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

y

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t.$$

Entonces, la hélice parametrizada por la longitud de arco es

$$\mathbf{x}(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Por eso:

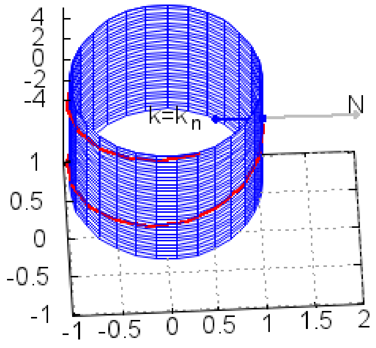
$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen}\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & \mathbf{x}'(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{1}{2}\left(-\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\operatorname{sen}\tfrac{s}{\sqrt{2}}, 0\right), & \mathbf{x}''(0) &= \frac{1}{2}(-1,0,0)\,.\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{x}''(0) = \frac{1}{2}(-1,0,0)\,.$$

Lo escribimos a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal. Como una base del espacio tangente es $(0,1,0)\,,\ (0,0,1)$ y una base de la recta normal es $(1,0,0)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}(-1,0,0) = (0,0,0) + \frac{1}{2}(-1,0,0)$$



23. Determinar curvatura geodésica del paralelo y del meridiano que pasan por un punto de la parte de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0,\pi)$.

Solución: Comenzamos determinando una base el espacio tangente y de la recta normal a la esfera. Como:

$$\mathbf{x}_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0), \quad \mathbf{x}_\phi = (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi),$$

Una base unitaria del espacio tangente es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}_\theta}{\|\mathbf{x}_\theta\|} = \frac{(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)}{\|(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\|} \\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \\
&= (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\phi\|} = \frac{(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)}{\|(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\|} \\
&= \frac{1}{R}(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)
\end{aligned}$$

La ecuación del meridiano es $\theta = c$ constante, es decir, es

$$\alpha\left(\phi\right) = \left(R' \operatorname{sen}\phi, R'' \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi\right),$$

donde $R' = R\cos\theta$ y $R'' = R\operatorname{sen}\theta$ son constantes. Como

$$\alpha'\left(\phi\right) = \left(R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right), \ \alpha''\left(\phi\right) = \left(-R'\operatorname{sen}\phi, -R''\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right),$$

entonces el vector tangente al meridiano es:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{R}\left(R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right),$$

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$\begin{aligned}
\left(\alpha' \times \alpha''\right) \times \alpha' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ R'\cos\phi & R''\cos\phi & -R\operatorname{sen}\phi \\ -R'\operatorname{sen}\phi & -R''\operatorname{sen}\phi & -R\cos\phi \end{vmatrix} \times \alpha' \\
&= \left(-RR'', RR', 0\right) \times \left(R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -RR'' & RR' & 0 \\ R'\cos\phi & R''\cos\phi & -R\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\
&= \left(-R^2R'\operatorname{sen}\phi, -R^2R''\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\left((R')^2 + (R'')^2\right)\right) \\
&= \left(-R^2R'\operatorname{sen}\phi, -R^2R''\operatorname{sen}\phi, -R^3\cos\phi\right).
\end{aligned}$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^4\left(R'\right)^2 \operatorname{sen}^2\phi + R^4\left(R''\right)^2 \operatorname{sen}^2\phi + R^6\cos^2\phi} = R^3.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \left(-\frac{R'}{R}\operatorname{sen}\phi, -\frac{R''}{R}\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right) \\
&= \left(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right).
\end{aligned}$$

Entonces, sabemos que

$$\mathbf{k} = \mathbf{N} = \kappa\mathbf{k} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

donde $R' = R\cos\theta$ y $R'' = R\,\mathrm{sen}\,\theta$ son constantes. Como

$$\beta'(\theta) = (-R''\,\mathrm{sen}\,\theta, R''\cos\theta, 0)\,,\ \beta''(\theta) = (-R''\cos\theta, -R''\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,,$$

entonces el vector tangente al paralelo es:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{1}{R''}(-R''\,\mathrm{sen}\,\theta, R''\cos\theta, 0)\\ &= (-\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)\,.\end{aligned}$$

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$\begin{aligned}(\beta'\times\beta'')\times\beta' &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ -R''\,\mathrm{sen}\,\theta & R''\cos\theta & 0\\ -R''\cos\theta & -R''\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\end{vmatrix}\times\beta'\\ &= \left(0,0,(R'')^2\right)\times(R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\,\mathrm{sen}\,\phi)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & (R'')^2\\ -R''\,\mathrm{sen}\,\theta & R''\cos\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= \left(-(R'')^3\cos\theta, -(R'')^3(\,\mathrm{sen}\,\theta), 0\right)\\ &= \left(-(R\,\mathrm{sen}\,\theta)^3\cos\theta, -(R\,\mathrm{sen}\,\theta)^3(\,\mathrm{sen}\,\theta), 0\right)\\ &= \left(-R^3\,\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta, -R^3\,\mathrm{sen}^4\theta, 0\right)\end{aligned}$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^6\,\mathrm{sen}^6\theta\cos^2\theta + R^6\,\mathrm{sen}^8\theta} = R^3\,\mathrm{sen}^3\theta.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{(\beta'\times\beta'')\times\beta'}{\|(\beta'\times\beta'')\times\beta'\|} = \frac{1}{R^3\,\mathrm{sen}^3\theta}\left(-R^3\,\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta, -R^3\,\mathrm{sen}^4\theta, 0\right)\\ &= (-\cos\theta, -\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,.\end{aligned}$$

Tenemos $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal, respectivamente. Una base del espacio

Hacemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)\\
&= a_1\,(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\\
&+ b_1\,(\cos\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi)\\
&+ c_1\,(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\\
&= (a_1\operatorname{sen}\theta + b_1\cos\theta\cos\phi - c_1\cos\theta\operatorname{sen}\phi, a_1\cos\theta + b_1\operatorname{sen}\theta\cos\phi - c_1\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -b_1\operatorname{sen}\phi
\end{aligned}$$

Entonces considerando la tercera componente del vector suma resulta:

$$-b_1\operatorname{sen}\phi - c_1\cos\phi = 0 \Longrightarrow b_1 = -c_1\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}.$$

Operando y suponiendo $a_1 = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)\\
&= a_1\,(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) - c_1\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\,(\cos\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi) + c_1\,(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta
\\
&= \left(a_1\operatorname{sen}\theta - c_1\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi}\cos\theta - c_1\cos\theta\operatorname{sen}\phi, a_1\cos\theta - c_1\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi}\operatorname{sen}\theta - c_1\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right)\\
&= \left(-c_1\cos\theta\left(\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi} + \operatorname{sen}\phi\right), -c_1\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi} + \operatorname{sen}\phi\right), 0\right)\\
&= \left(-c_1\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\cos\theta, -c_1\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\operatorname{sen}\theta, 0\right).
\end{aligned}$$

Entonces, si tomamos

$$a_1 = 0,\quad b_1 = -\cos\phi,\quad c_1 = \operatorname{sen}\phi$$

se cumple:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= -\cos\phi\,(\cos\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi) + \operatorname{sen}\phi\,(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\\
&= -\cos\phi\mathbf{v} + \operatorname{sen}\phi\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Así tenemos ya el vector curvatura geodésica, que es:

24. Sea la superficie $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$ donde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Determínenese los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en $\mathbf{x}(0,0) = (0,0,0)$ para la curva $\mathbf{x}(t) = (t, 0, t^2 + t^4)$.

Solución. Comenzamos determinando $\mathbf{N}$. Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (1,0,2u+4u^3), & \mathbf{x}_u(0,0) &= (1,0,0), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (0,1,6v^5), & \mathbf{x}_v(0,0) &= (0,1,0). \end{aligned}$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1).$$

Determinamos el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$, que tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (1,0,2t+4t^3), & \mathbf{x}'(0) &= (1,0,0), \\ \mathbf{x}''(t) &= (0,0,2+12t^2), & \mathbf{x}''(0) &= (0,0,2). \end{aligned}$$

Entonces, el vector $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((1,0,0) \times (0,0,2)) \times (1,0,0) \\ &= (0,-2,0) \times (1,0,0) \\ &= (0,0,2). \end{aligned}$$

El vector normal a la curva es

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(0,0,2)}{\|(0,0,2)\|} = (0,0,1).$$

Por otro lado, la curvatura es

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(0) &= 2(0,0,1)\\ &= (0,0,2).\end{aligned}$$

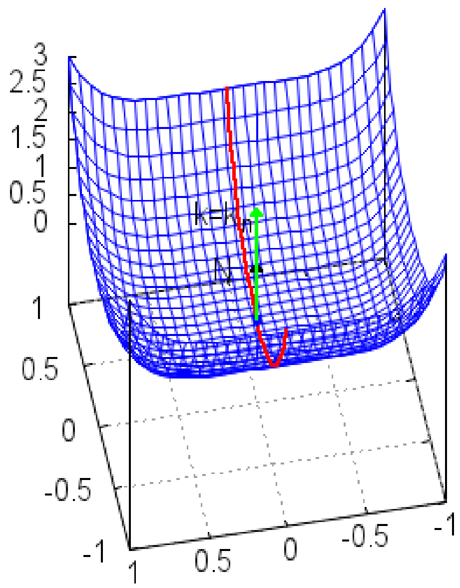
Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(1,0,0),(0,1,0)$ y una base de la recta normal es $(0,0,1)$, tenemos que

$$(0,0,2) = 2(0,0,1),$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = (0,0,0), \quad \mathbf{k}_n(0) = 2(0,0,1).$$

En la siguiente figura se representan la superficie y la curva y los vectores normal a la superficie, en negro y curvatura y curvatura normal, que coinciden, en verde.



para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Solución: Sabemos que en un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ se tiene

$$\begin{aligned} E &= R^2 \operatorname{sen}^2\phi, \ F = 0, \ G = R^2, \\ e &= R \operatorname{sen}^2\phi, \ f = 0, \ g = R. \end{aligned}$$

Entonces la curvatura normal en la dirección $(d\theta, d\phi)$ es

$$\kappa_n = \frac{II_P(d\theta, d\phi)}{I_P(d\theta, d\phi)} = \frac{R \operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + R (d\phi)^2}{R^2 \operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + R^2 (d\phi)^2} = \frac{1}{R} \frac{\operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2}{\operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2} = \frac{1}{R}.$$

26. Sea la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$$

donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Determínense las secciones normales en el punto $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$.

Solución: Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, 2u + 4u^3), \quad & \mathbf{x}_u(0, 0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 1, 6v^5), & \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Tenemos que considerar ahora los planos normales a la superficie, es decir, planos que contienen al vector normal en $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$, $\mathbf{N}(0, 0) = (0, 0, 1)$. Vamos a suponer que el otro vector director del plano es tangente a la curva, es decir, es de la forma $(v_1, v_2, 0)$. También podemos suponer que $v_1 = \pm 1, 0$.

La ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 0) + \lambda (0, 0, 1) + \mu (v_1, v_2, 0) \\ &= (\mu v_1, \mu v_2, \lambda). \end{aligned}$$

Si $v_1 = 1$, podemos hacer:

$$u = 1 \cdot \mu \Longrightarrow \mu = u,$$
$$v = \mu v_2 = u v_2.$$

Si llamamos $u = t$, tenemos la ecuación de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, t v_2, t^2 + t^4 + (t v_2)^6\right).$$

Si $v_1 = -1$, el vector tangente que resulta tiene la misma dirección y sentido contrario que el vector con $v_1 = 1$ y la curva resultante sería la misma, aunque su ecuación variara.

27. Determíne las curvaturas principales del cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v).$$

Calcúlese, a partir de ellas, la curvatura de Gauss y la curvatura normal.

Determine, además, las direcciones principales.

Solución. Primero determinamos los coeficientes de las formas fundamentales. Sabemos que

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \ \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 0, 1),$$
$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} = \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|}$$
$$= (\cos u,\ \operatorname{sen} u, 0).$$

Entonces:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) = 1,$$
$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$
$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1.$$

Además,

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \quad \mathbf{x}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(u, v) = (0, 0, 0).$$

Entonces la ecuación de las curvaturas principales es:

$$\begin{aligned}\left(EG-F^2\right)k^2-\left(Eg+Ge-2Ff\right)k+\left(eg-f^2\right)=0 \Longleftrightarrow \\ k^2+k=0 \Longleftrightarrow \\ k\left(k+1\right)=0.\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecaución son las curvaturas principales

$$\kappa_1=0,\quad \kappa_2=-1.$$

La curvatura de Gauss es:

$$K=\kappa_1\kappa_2=0,$$

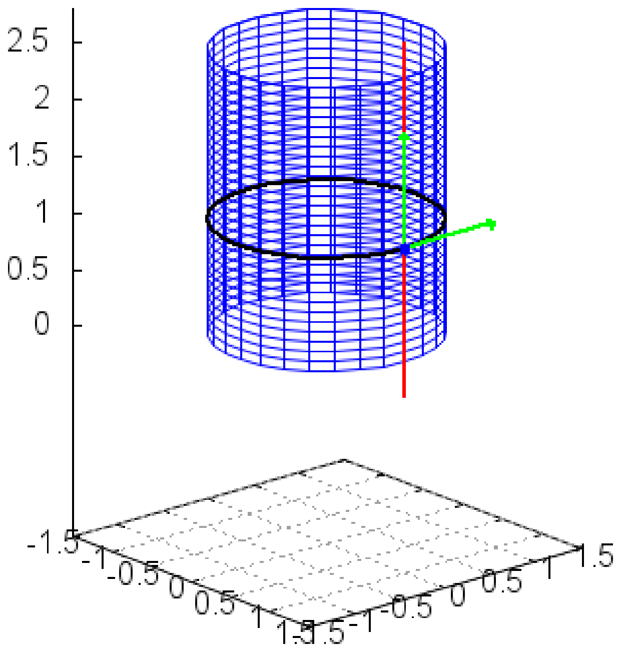
y la curvatura media es

$$H=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Vamos a determinar ahora las direcciones principales a partir de su ecuación:

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$
$$\Longleftrightarrow m=0.$$

Entonces, una dirección principal es $(h,0)$. La otra dirección principal es ortogonal a esta y, por tanto, es la dirección de $(0,1)$. La curvatura $\kappa_1=0$ corresponde a la dirección con curvatura mayor, que es la de v o dirección paralela al eje (en rojo en la figura). Es lo que podíamos esperar, porque es una recta con vector director $\mathbf{x}_v=(0,0,1)$. La otra dirección corresponde a $\mathbf{x}_u=(-\operatorname{sen}u,\cos u,0)$, que es la dirección, entre otras curvas, de la circunferencia perpendicular al eje que pasa por $\mathbf{x}\left(u,v\right)$, representada en negro en la figura. Obsérvese que es negativa, y la razón está en que el vector normal a la superficie es exterior a ella y el vector curvatura de la circunferencia tiene sentido contrario a él.



En esta superficie, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son constantes y valen:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0\,(-1) = 0, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

28. Calcular la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la superficie dada por $z^2 = x^2 - y^2$ en el punto $(1,0,1)$.

Solución: En un entorno de $(1,0,1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}\,(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$. Entonces:

$$\mathbf{x}_u\,(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v\,(u,v) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\right),$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \end{vmatrix} = -\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En $(u,v)=(1,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(1,0)&=(1,0,1)\,,\ \mathbf{x}_v(1,0)=(0,1,0)\,,\\
\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v&=(-1,0,1)\,,\ \mathbf{N}=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
\mathbf{x}_{uu}(1,0)&=(0,0,0)\,,\ \mathbf{x}_{uv}(1,0)=(0,0,0)\,,\ \mathbf{x}_{vv}(1,0)=(0,0,-1)\,.
\end{aligned}$$

Podemos ya calcular los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$:

$$\begin{aligned}
E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=(1,0,1)\cdot(1,0,1)=2,\\
F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=(1,0,1)\cdot(0,1,0)=0,\\
G&=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=(0,1,0)\cdot(0,1,0)=1,\\
e&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,0)=0,\\
f&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,0)=0,\\
g&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

La curvatura de Gauss es

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{0-0}{2}=0.$$

La curvatura media es

$$H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0+0}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La ecuación de las curvaturas principales es

$$\begin{aligned}
k^2\left(EG-F^2\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^2+eg=0 \Longleftrightarrow\\
2k^2+\frac{2}{\sqrt{2}}k=0
\end{aligned}$$

29. Sea S el cilindro dado por la ecuación paramétrica
$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v) .$$
Se pide determinar las líneas de curvatura que pasan por $(1,0,0)$.

Solución: Sabemos que $(1,0,0) = \mathbf{x}(0,0)$. También sabemos que
$$\begin{array}{lll} E = 1, & F = 0, & G = 1, \\ e = -1, & f = 0, & g = 0. \end{array}$$
La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es
$$-dudv = 0.$$
Como $dudv = 0$, entonces debe ser
$$du = 0 \text{ o } dv = 0.$$
En el primer caso:
$$du = 0 \implies u = c \in \mathbb{R}.$$
Al pasar por $(1,0,0) = \mathbf{x}(0,0)$, se cumple $u = 0$ y la ecuación de la línea de curvatura es
$$\mathbf{x}(t) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0, t) = (1,0,t) .$$
Es la ecuación de la recta vertical, paralela al eje del cilindro, y que pasa por $(1,0,0)$.

La condición $dv = 0$ implica que debe ser constante v. Como en este punto $v = 0$, la ecuación de la línea de curvatura es
$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) .$$
Esta ecuación corresponde a una circunferencia, intersección del plano xy con el cilindro.

30. Sea S la superficie dada por $z = y^2 - x^2$. Se pide determinar las líneas de curvatura y líneas asintóticas que pasan por $(0,0,0)$.

Solución: Tenemos que determinar los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental. Hacemos, para la parametrización $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$,

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\,(2u,-2v,1)\,,\\
E &= (1,0,-2u)\cdot(1,0,-2u) = 1+4u^2,\\
F &= (1,0,-2u)\cdot(0,1,2v) = -4uv,\\
G &= (0,1,2v)\cdot(0,1,2v) = 1+4v^2,\\
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu} = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv} = 0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv} = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.
\end{aligned}
$$

En $(0,0,0)$, es

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{n} = (0,0,1)\,,\quad E=1,\quad F=0,\quad G=1,\\
&e=-2,\quad f=0,\quad g=2.
\end{aligned}
$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$
\begin{aligned}
(Ef-Fe)\,du^2 + (Eg-Ge)\,dudv + (gF-Gf)\,dv^2 = 0 \Longleftrightarrow\\
(0-0)\,du^2 + (1\cdot 2 - 1\cdot(-2))\,dudv + (2\cdot 0 - 1\cdot 0)\,dv^2 = 0 \Longleftrightarrow\\
4dudv = 0 \Longleftrightarrow dudv = 0.
\end{aligned}
$$

Su solución es

$$u = c,\ v = k,$$

donde c y k son constantes.

La ecuación de las líneas asintóticas es

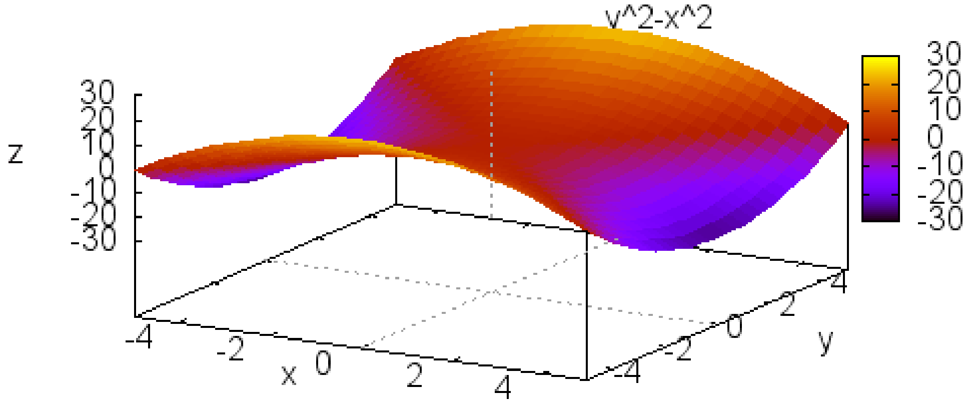
$$edu^2+2fdudv+gdv^2 = 0 \Longleftrightarrow -2du^2+2dv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad du^2-dv^2 = 0.$$

Esto implica

$$dv-du = 0,\quad du+dv = 0.$$

Puede dar $v=u, v=-u$. Entonces tenemos

$$x=u, y=u, z=0; x=u, y=-u, z=0.$$


y^2-x^2
z
30
20
10
0
-10
-20
-30
x
-4
-2
0
2
4
y
-4
-2
0
2
4